Đ2501

HÀ NGHĨA ANH - NGUYỄN THUÝ MÙI - TRẦN KỲ TRANH
(Tuyển chọn và giới thiệu)

ĐỀ THI TUYỂN SINH VÀO LỚP 10

MÔN TOÁN

ĐỀ THI CỦA CÁC TRƯỜNG CHUYÊN, CHỌN TRÊN TOÀN QUỐC

(Tái bản lần thứ tư, có sửa chữa bổ sung)

THƯ VIỆN TỈNH BÌNH THUẬN
DVL / 12789 / 13

NHÀ XUẤT BẢN ĐẠI HỌC QUỐC GIA HÀ NỘI

NHÀ XUẤT BẢN ĐẠI HỌC QUỐC GIA HÀ NỘI
16 Hàng Chuối – Hai Bà Trưng – Hà Nội
Điện thoại: Biên tập-Chế bản: (04) 39714896;
Hành chính: (04) 39714899; Tổng biên tập: (04) 39714897
Fax: (04) 39714899

Chịu trách nhiệm xuất bản

Giám đốc - Tổng biên tập: TS. PHẠM THỊ TRÂM

Biên tập lần đầu: NGUYỄN VĂN TRỌNG
Biên tập tái bản: NGUYỄN THỦY
Chế bản: NHÀ SÁCH HỒNG ÂN
Trình bày bìa: THÁI VĂN

Đối tác liên kết xuất bản:
NHÀ SÁCH HỒNG ÂN

SÁCH LIÊN KẾT

ĐỀ THI TUYỂN SINH VÀO LỚP 10 MÔN TOÁN

Mã số: 1L – 351ĐH2012
In 1.000 cuốn, khổ 16 × 24cm tại Công ty Cổ phần Văn hóa Văn Lang.
Số xuất bản: 1557 – 2012/CXB/02 – 253/ĐHQGHN, ngày 26/12/2012.
Quyết định xuất bản số: 355LK-TN/QĐ - NXBĐHQGHN.
In xong và nộp lưu chiểu quý I năm 2013.

LỜI NÓI ĐẦU

Các em học sinh thân mến!

Học là quá trình rèn luyện vất vả nhất của đời người. Điều gì vất vả mới có được thì đó chính là điều mình quý nhất.

Nhằm giúp các em chuẩn bị thi vào lớp 10, giúp các em có thêm tư liệu và có một cái nhìn tổng quát về những vấn đề trong các đề thi tuyển sinh vào lớp 10 trong những năm gần đây, chúng tôi biên soạn cuốn:

"ĐỀ THI TUYỂN SINH VÀO LỚP 10 MÔN TOÁN".

Sách gồm đề thi của các trường chuyên, chọn trên toàn quốc từ năm học 2000 đến nay.

Chúng tôi hi vọng cuốn sách sẽ rất hữu ích cho các em trên con đường học tập.

Trong quá trình biên soạn khó tránh khỏi những thiếu sót, rất mong nhận được sự góp ý của bạn đọc gần xa.

Chúc các em thành công trong kì thi sắp tới.

CÁC TÁC GIẢ

ĐỀ 1

TRƯỜNG PTTH CHUYÊN LÊ HỒNG PHONG – TRẦN ĐẠI NGHĨA
LỚP CHUYÊN NGUYỄN THƯỢNG HIỀN – LỚP CHUYÊN GIA ĐỊNH
Đề thi tuyển sinh vào lớp 10 PTTH chuyên tại TP.HCM năm học 2006 – 2007

Câu 1. Thu gọn các biểu thức sau :

$$A = (2\sqrt{4+\sqrt{6-2\sqrt{5}}})(\sqrt{10}-\sqrt{2}),$$

$$B = \left(\frac{\sqrt{a}-1}{\sqrt{a}+1}+\frac{\sqrt{a}+1}{\sqrt{a}-1}\right)\left(1-\frac{2}{a+1}\right)^2 \quad \text{với } a > 0,\ a \neq 1.$$

Câu 2. Với giá trị nào của m thì đường thẳng (d) : $y = \frac{3}{2}x + 2m$ cắt Parabol (P) : $y = -\frac{3}{4}x^2$ tại hai điểm phân biệt ?

Câu 3. Giải các phương trình và hệ phương trình :

a) $\sqrt{5-x^2} = x-1$

b) $\begin{cases} \dfrac{3}{x}-\dfrac{4}{y}=2 \\ \dfrac{4}{x}-\dfrac{5}{y}=3. \end{cases}$

c) $\sqrt{-x^2+4x-2}+\sqrt{-2x^2+8x-5}=\sqrt{2}+\sqrt{3}.$

Câu 4.

a) Cho hai số dương x, y thỏa : $x + y = 3\sqrt{xy}$. Tính $\frac{x}{y}$.

b) Tìm các số nguyên dương x, y thỏa : $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{1}{2}$.

Câu 5. Cho tam giác ABC có ba góc nhọn (AB < AC), có đường cao AH. Gọi D, E lần lượt là trung điểm của AB và AC.

a) Chứng minh DE là tiếp tuyến chung của hai đường tròn ngoại tiếp tam giác DBH và ECH.

b) Gọi F là giao điểm thứ nhì của hai đường tròn ngoại tiếp tam giác DBH và ECH. Chứng minh HF đi qua trung điểm của DE.

c) Chứng minh rằng đường tròn ngoại tiếp tam giác ADE đi qua điểm F.

BÀI GIẢI

Câu 1. $A = \left(\sqrt{16+4\sqrt{(\sqrt{5}-1)^2}}\right)(\sqrt{10}-\sqrt{2}) = (\sqrt{16+4(\sqrt{5}-1)}(\sqrt{10}-\sqrt{2})$

$$A = (\sqrt{2}\sqrt{6+2\sqrt{5}})(\sqrt{10}-\sqrt{2}) = (\sqrt{2}\sqrt{(\sqrt{5}+1)^2}(\sqrt{10}-\sqrt{2})$$

$$= \sqrt{2}(\sqrt{5}+1)(\sqrt{10}-\sqrt{2}) = (\sqrt{10}+\sqrt{2})(\sqrt{10}-\sqrt{2}) = 8.$$

$$B = \left(\frac{\sqrt{a}-1}{\sqrt{a}+1}+\frac{\sqrt{a}+1}{\sqrt{a}-1}\right)\cdot\left(1-\frac{2}{a+1}\right)^2 = \left(\frac{a-2\sqrt{a}+1+a+2\sqrt{a}+1}{a-1}\right)\cdot\left(\frac{a-1}{a+1}\right)^2$$

$$= \frac{2(a+1)}{a-1}\cdot\left(\frac{a-1}{a+1}\right)^2 = \frac{2(a-1)}{a+1}.$$

Câu 2. Phương trình hoành độ giao điểm của (d) và (P) là :

$$\frac{3}{2}x + 2m = -\frac{3}{4}x^2 \quad \Leftrightarrow \quad 3x^2 + 6x + 8m = 0 \qquad (*)$$

Điều kiện để (d) cắt (P) tại 2 điểm phân biệt là (*) có 2 nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow \quad \Delta' = 9 - 24m > 0 \quad \Leftrightarrow \quad m < \frac{3}{8}$.

Câu 3.

a) $\sqrt{5-x^2} = x - 1 \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} x - 1 \ge 0 \\ 5 - x^2 = (x-1)^2 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} x \ge 1 \\ 2x^2 - 2x - 4 = 0 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \quad \begin{cases} x \ge 1 \\ x = -1 \text{ hoặc } x = 2 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad x = 2.$$

b) Điều kiện : $x \ne 0,\ y \ne 0$.

Đặt $u = \frac{1}{x};\ v = \frac{1}{y}$. Hệ đã cho có dạng : $\begin{cases} 3u - 4v = 2 \\ 4u - 5v = 3 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} u = 2 \\ v = 1 \end{cases}$

Với u = 2, ta có : $\frac{1}{x} = 2 \Rightarrow x = \frac{1}{2}$.

Với v = 1, ta có : $\frac{1}{y} = 1 \Rightarrow y = 1$.

So với điều kiện ta nhận $x = \frac{1}{2};\ y = 1$.

Vậy hệ đã cho có nghiệm (x; y) là $\left(\frac{1}{2}; 1\right)$.

c) Khi các điều kiện xác định thỏa ta có :

$$\sqrt{-x^2+4x-2} = \sqrt{2-(x-2)^2} \le \sqrt{2}$$

$$\sqrt{-2x^2+8x-5} = \sqrt{3-2(x-2)^2} \le \sqrt{3}$$

Do đó : $\sqrt{-x^2+4x-2} + \sqrt{-2x^2+8x-5} \le \sqrt{2} + \sqrt{3}$

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow$ x = 2. Vậy phương trình có nghiệm duy nhất x = 2.

Câu 4.

a) Ta có : $x + y = 3\sqrt{xy} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{x}{y} + 1 = 3\sqrt{\frac{x}{y}} \qquad (1)$

Đặt $u = \sqrt{\frac{x}{y}},\ u > 0$.

$$(1) \quad \Leftrightarrow \quad u^2 - 3u + 1 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad u = \frac{3 \pm \sqrt{5}}{2} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{x}{y} = \frac{(3 \pm \sqrt{5})^2}{4}.$$

b) Vì vai trò của x và y là như nhau nên ta có thể giả sử : $x \ge y$.

Ta có : $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{2};\quad x > 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{1}{y} < \frac{1}{2} \quad \Rightarrow \quad y > 2.$

$$x \ge y > 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{x} \le \frac{1}{y} \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{2} = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} \le \frac{2}{y} \quad \Rightarrow \quad y \le 4.$$

Do đó : $2 < y \le 4$. Mà y là số nguyên dương (giả thiết) nên y = 3 hoặc y = 4.

Với $y = 3 \Rightarrow x = 6$. Do tính đối xứng ta cũng có x = 3 và y = 6.

Với $y = 4 \Rightarrow x = 4$.

Cách khác :

Ta có : $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{2} \quad \Leftrightarrow \quad 2(x+y) = xy \quad \Leftrightarrow \quad 2x - xy + 2y = 0$

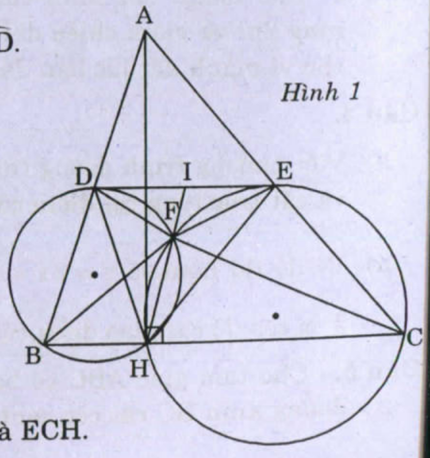
$$\Leftrightarrow \quad x(2-y) - 2(2-y) = -4 \quad \Leftrightarrow \quad (2-x)(2-y) = 4$$

Vì x, y > 0 nên 2 – x < 2, 2 – y < 2. Do đó ta có các trường hợp sau :

- 2 – x = –1 và 2 – y = –4 $\Leftrightarrow$ x = 3 và y = 6 (nhận)
- 2 – x = –4 và 2 – y = –1 $\Leftrightarrow$ x = 6 và y = 3 (nhận)
- 2 – x = –2 và 2 – y = –2 $\Leftrightarrow$ x = 4 và y = 4 (nhận).

Vậy ta có các cặp số nguyên dương (x; y) là : (3; 6), (6; 3), (4; 4).

Câu 5. *(Hình 1)*



Hình 1

a) Ta có : DE // BC nên $\widehat{HDE} = \widehat{BHD}$.

Tam giác vuông ABH có HD là trung tuyến nên DH = DB, suy ra $\widehat{BHD} = \widehat{DBH}$. Do đó $\widehat{HDE} = \widehat{DBH}$.

Suy ra DE tiếp xúc đường tròn ngoại tiếp tam giác DBH tại D.

Tương tự như trên, ta có DE tiếp xúc đường tròn ngoại tiếp tam giác ECH tại E.

Vậy DE là tiếp tuyến chung của hai đường tròn ngoại tiếp tam giác DBH và ECH.

b) Ta có : $\widehat{IDF} = \widehat{IHD}$ và $\widehat{IFD} = \widehat{IDH}$ (= $\widehat{DBF}$).

Do đó hai tam giác IDF và IHD đồng dạng.

Suy ra : $\frac{ID}{IH} = \frac{IF}{ID} \Rightarrow ID^2 = IF.IH$ (1)

Tương tự ta có : $IE^2 = IF.IH$ (2)

Từ (1) và (2), suy ra ID = IE hay HF qua trung điểm I của DE.

c) Vì các tứ giác BDFH và CEFH nội tiếp nên :

$$\widehat{DFH} + \widehat{DBH} = 180^0; \quad \widehat{EFH} + \widehat{ECH} = 180^0.$$

Trong tam giác ABC có : $\widehat{BAC} + \widehat{DBH} + \widehat{ECH} = 180^0$.

Lại có : $\widehat{DFH} + \widehat{EFH} + \widehat{DFE} = 360^0$. Suy ra : $\widehat{BAC} + \widehat{DFE} = 180^0$.

Vậy đường tròn ngoại tiếp tam giác ADE qua F.

ĐỀ 2

ĐỀ THI TUYỂN SINH VÀO LỚP 10 TẠI TP. HCM NĂM HỌC 2006 – 2007

Câu 1. Giải các phương trình và hệ phương trình sau :

a) $\begin{cases} 3x + 2y = 1 \\ 5x + 3y = -4 \end{cases}$ **b)** $2x^2 + 2\sqrt{3x} - 3 = 0$ **c)** $9x^4 + 8x^2 - 1 = 0$.

Câu 2. Thu gọn các biểu thức sau :

$$A = \frac{\sqrt{15} - \sqrt{12}}{\sqrt{5} - 2} - \frac{1}{2 - \sqrt{3}}; \qquad B = \left(\frac{\sqrt{a} - 2}{\sqrt{a} + 2} - \frac{\sqrt{a} + 2}{\sqrt{a} - 2}\right) \cdot \left(\sqrt{a} - \frac{4}{\sqrt{a}}\right)$$

(với a > 0 và a ≠ 4).

Câu 3. Cho mảnh đất hình chữ nhật có diện tích $360m^2$. Nếu tăng chiều rộng 2m và giảm chiều dài 6m thì diện tích mảnh đất không đổi. Tính chu vi mảnh đất lúc ban đầu.

Câu 4.

a) Viết phương trình đường thẳng (d) song song với đường thẳng $y = 3x + 1$ và cắt trục tung tại điểm có tung độ bằng 4.

b) Vẽ đồ thị hàm số $y = 3x + 4$ và $y = -\frac{x^2}{2}$ trên cùng một hệ trục tọa độ.

Tìm tọa độ các giao điểm của hai đồ thị ấy bằng phép tính.

Câu 5. Cho tam giác ABC có ba góc nhọn và AB < AC. Đường tròn tâm O đường kính BC cắt các cạnh AB, AC theo thứ tự tại E và D.

a) Chứng minh AD.AC = AE.AB.

b) Gọi H là giao điểm của BD và CE, gọi K là giao điểm của AH và BC. Chứng minh AH vuông góc với BC.

c) Từ A kẻ các tiếp tuyến AM, AN đến đường tròn (O) với M, N là các tiếp điểm. Chứng minh $\widehat{ANM} = \widehat{AKN}$.

d) Chứng minh ba điểm M, H, N thẳng hàng.

BÀI GIẢI

Câu 1.

a) $\begin{cases} 3x + 2y = 1 \\ 5x + 3y = -4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -9x - 6y = -3 \\ 10x + 6y = -8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -11 \\ y = 17 \end{cases}$

Vậy hệ có nghiệm (x; y) là : (–11; 17).

b) $2x^2 + 2\sqrt{3}\,x - 3 = 0$ $\quad \Delta' = 9 \Rightarrow \sqrt{\Delta'} = 3$.

Phương trình có hai nghiệm phân biệt : $x_1 = \frac{-\sqrt{3} + 3}{2}$; $x_2 = \frac{-\sqrt{3} - 3}{2}$.

c) $9x^4 + 8x^2 - 1 = 0$.

Đặt $t = x^2$, $(t \geq 0)$. Phương trình đã cho có dạng : $9t^2 + 8t - 1 = 0$

Vì $a - b + c = 1 \Rightarrow t_1 = -1$; $t_2 = \frac{1}{9}$.

So với điều kiện $t \geq 0$ ta nhận $t = \frac{1}{9}$.

Với $t = \frac{1}{9}$, ta có $x^2 = \frac{1}{9} \Rightarrow x = \pm\frac{1}{3}$.

Vậy phương trình đã cho có nghiệm là : $\frac{1}{3}$; $-\frac{1}{3}$.

Câu 2. $A = \frac{\sqrt{15} - \sqrt{12}}{\sqrt{5} - 2} - \frac{1}{2 - \sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}(\sqrt{5} - 2)}{\sqrt{5} - 2} - \frac{1.(2 + \sqrt{3})}{(2 - \sqrt{3})(2 + \sqrt{3})}$

$= \sqrt{3} - 2 - \sqrt{3} = -2.$

$$B = \left(\frac{\sqrt{a} - 2}{\sqrt{a} + 2} - \frac{\sqrt{a} + 2}{\sqrt{a} - 2}\right)\left(\sqrt{a} - \frac{4}{\sqrt{a}}\right) = \frac{(\sqrt{a} - 2)^2 - (\sqrt{a} + 2)^2}{(\sqrt{a} + 2)(\sqrt{a} - 2)} \cdot \frac{a - 4}{\sqrt{a}}$$

$$= \frac{-8\sqrt{a}}{a - 4} \cdot \frac{a - 4}{\sqrt{a}} = -8.$$

Câu 3. Gọi chiều rộng của mảnh đất lúc đầu là : x (m), (x > 0).

Chiều dài mảnh đất lúc đầu là : $\frac{360}{x}$ (m).

Chiều rộng mảnh đất sau khi tăng 2m là : $x + 2$ (m).

Chiều dài mảnh đất sau khi giảm 6m là : $\frac{360}{x} - 6$ (m).

Từ điều kiện đầu bài ta có phương trình : $(x + 2)\left(\frac{360}{x} - 6\right) = 360$.

Giải phương trình này ta được $x_1 = 10$ (nhận) và $x_2 = -12$ (loại).

Vậy : Chiều rộng mảnh đất lúc đầu là : 10 (m).

Chiều dài mảnh đất lúc đầu là : $\frac{360}{10} = 36$ (m)

Chu vi mảnh đất lúc đầu là : $(36 + 10) \times 2 = 92$ (m).

Câu 4.

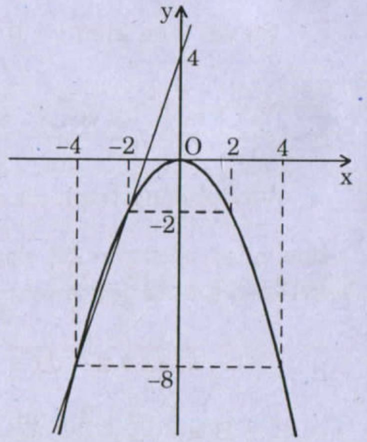
a) Phương trình (d) song song với đường thẳng $y = 3x + 1$ nên có dạng : $y = 3x + b$, (d) cắt trục tung tại điểm có tung độ bằng $4 \Rightarrow b = 4$.

Vậy (d) : $y = 3x + 4$.

b) Bảng giá trị :

x	-4	-2	0	2	4
$y = -\frac{x^2}{2}$	-8	-2	0	-2	-8

x	0	-2
$y = 3x + 4$	4	-2



Phương trình hoành độ giao điểm của (P) : $y = -\frac{x^2}{2}$ và (d) : $y = 3x + 4$ là :

$-\frac{x^2}{2} = 3x + 4 \Leftrightarrow \quad x^2 + 6x + 8 = 0$

$\Leftrightarrow \quad x_1 = -2$ và $x_2 = -4$

Với $x_1 = -2 \quad \Rightarrow \quad y_1 = -2$

Với $x_2 = -4 \quad \Rightarrow \quad y_1 = -8$.

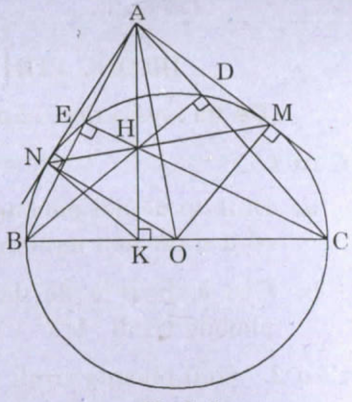
Vậy tọa độ giao điểm của (P) và (d) là : $(-2; 2)$ và $(-4; 8)$.

Câu 5. *(Hình 2)*

a) Ta có : $\widehat{ABD} = \widehat{AEC}$ (cùng chắn cung $\overset{\frown}{DE}$).

Suy ra hai tam giác vuông ABD và ACE đồng dạng.

Do đó $\frac{AB}{AC} = \frac{AD}{AE} \Rightarrow \quad AD.AC = AE.AB$.



Hình 2

b) Ta có : $\widehat{BEC} = \widehat{BDC} = 90^0$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn).

Suy ra : $BD \perp AC$ và $CE \perp AB$.

Hay BD và CE là hai đường cao của tam giác ABC.

Mà H là giao điểm của BD và CE nên H là trực tâm của tam giác ABC.

Suy ra $AH \perp BC$.

c) Ta có : $\widehat{ANM} = \frac{1}{2}\widehat{MON}$ (góc tạo bởi tia tiếp tuyến và dây với góc ở tâm cùng chắn $\overset{\frown}{MN}$).

Mà OA là tia phân giác của góc MON (tính chất hai tiếp tuyến cắt nhau) nên $\widehat{AON} = \frac{1}{2}\widehat{MON}$, suy ra : $\widehat{AMN} = \widehat{AON}$ (1)

Ta lại có : $\widehat{ANO} = \widehat{AMO} = 90^0$, nên tứ giác ANKO nội tiếp (tứ giác có hai đỉnh kề cùng nhìn một cạnh dưới hai góc bằng nhau), suy ra :

$\widehat{AKN} = \widehat{AON}$ (2)

Từ (1) và (2), suy ra : $\widehat{ANM} = \widehat{AKN}$.

d) Ta có : $\widehat{ANE} = \widehat{ABN}$ (góc tạo bởi tia tiếp tuyến và dây với góc nội tiếp cùng chắn cung $\overset{\frown}{NE}$). Và $\widehat{NAB}$ là góc chung của hai tam giác ANB và ANE.

Suy ra $\Delta ANE \backsim \Delta ABN$ (g-g) $\Rightarrow \frac{AN}{AB} = \frac{AE}{AN} \Rightarrow AN^2 = AE.AB$ (3)

Lại có : $\widehat{AEH} = \widehat{AKB} = 90^0$

Suy ra $\Delta AEH \backsim \Delta AKB$ (g-g) $\Rightarrow \frac{AE}{AK} = \frac{AH}{AB} \Rightarrow AE.AB = AH.AK$ (4)

Từ (3) và (4) $\Rightarrow \quad AN^2 = AH.AK$.

Xét ΔANH và ΔANK có : $\widehat{NAK}$ chung và $\frac{AN}{AK} = \frac{AH}{AN}$.

Suy ra $\Delta ANH \backsim \Delta AKN$ (c-g-c) $\Rightarrow \widehat{ANH} = \widehat{AKN}$.

Trên cùng một nửa mặt phẳng có bờ chứa tia NA, ta có : $\widehat{ANH} = \widehat{ANM}$.

Suy ra hai tia NH và NM trùng nhau.

Vậy 3 điểm M, H, N thẳng hàng.

ĐỀ 3

TRƯỜNG PTTH CHUYÊN LÊ HỒNG PHONG, TPHCM

Đề thi tuyển sinh vào lớp 10 chuyên Toán năm học 2005 – 2006

Câu 1.

a) Định m để hai phương trình : $x^2 + x + m = 0$ và $x^2 + mx + 1 = 0$ có ít nhất một nghiệm chung.

b) Cho a, b, c là độ dài ba cạnh của một tam giác. Chứng minh rằng phương trình : $b^2x^2 + (b^2 + c^2 - a^2)x + c^2 = 0$ vô nghiệm.

Câu 2. Giải phương trình và hệ phương trình :

a) $\begin{cases} x^3 - y^3 = 3(x - y) \\ x + y = -1 \end{cases}$ **b)** $\dfrac{2x}{3x^2 - 5x + 2} + \dfrac{13x}{3x^2 + x + 2} = 6.$

Câu 3.

a) Chứng minh $2(a^4 + b^4) \geq ab^3 + a^3b + 2a^2b^2$ với mọi a, b.

b) Chứng minh $\sqrt{a^2 - b^2} + \sqrt{2ab - b^2} > a$, với $a > b > 0$.

Câu 4. Tìm các số nguyên dương có 2 chữ số, biết số đó là bội của tích 2 chữ số của chính số đó.

Câu 5. Cho hình bình hành ABCD có góc A nhọn, AB < AD. Tia phân giác của góc $\widehat{BAD}$ cắt BC tại M và cắt DC tại N. Gọi K là tâm của đường tròn ngoại tiếp tam giác MCN.

a) Chứng minh DN = BC và $CK \perp MN$.

b) Chứng minh rằng BKCD là một tứ giác nội tiếp.

Câu 6. Cho tam giác ABC có $\widehat{A} = 2\widehat{B}$. Chứng minh rằng :

$$BC^2 = AC^2 + AB.AC.$$

BÀI GIẢI

âu 1.

a) Gọi x_0 là nghiệm chung của hai phương trình ta có :

$$x_0^2 + x_0 + m = 0 \quad (*); \qquad x_0^2 + mx_0 + 1 = 0.$$

Từ đó $(x_0^2 + x_0 + m) - (x_0^2 + mx_0 + 1) = 0 \Rightarrow (1 - m)(x_0 - 1) = 0.$

Với m = 1, cả hai phương trình đều có dạng : $x^2 + x + 1 = 0$ (vô nghiệm).

Với $x_0 = 1$ từ (*) có m = –2, khi đó phương trình $x^2 + x + m = 0$ có hai nghiệm là 1 và –2. Phương trình $x^2 + mx + 1 = 0$ có nghiệm kép là 1.

Vậy m = –2 thì hai phương trình đã cho có ít nhất một nghiệm chung.

b) $b^2x^2 + (b^2 + c^2 - a^2)x + c^2 = 0$

Ta có : $\Delta = (b^2 + c^2 - a^2)^2 - 4b^2c^2 = (b^2 + c^2 - a^2)^2 - (2bc)^2$

$= [(b + c)^2 - a^2][(b - c)^2 - a^2]$

$= (b + c + a)(b + c - a)(b - c + a)(b - c - a).$

Do a, b, c là độ dài ba cạnh của tam giác nên $\Delta < 0$.

Vậy phương trình đã cho vô nghiệm.

Câu 2.

a) $\begin{cases} x^3 - y^3 = 3(x - y) \\ x + y = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x - y)(x^2 + xy + y^2 - 3) = 0 \\ x + y = -1 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} \begin{cases} x - y = 0 \\ x + y = -1 \end{cases} & \text{(I)} \\ \begin{cases} x^2 + xy + y^2 - 3 = 0 \\ x + y = -1 \end{cases} & \text{(II)} \end{array}\right.$$

Giải hệ (I) ta có nghiệm $(x; y) = \left(-\dfrac{1}{2}; -\dfrac{1}{2}\right)$.

Xét hệ (II) từ phương trình cuối $x + y = -1 \Rightarrow y = -1 - x$. Thay vào phương trình đầu ta được $x^2 + x - 2 = 0$. Suy ra hệ (II) có hai nghiệm (x; y) = (1; –2), (–2; 1).

Vậy hệ đã cho có 3 nghiệm là $\left(-\dfrac{1}{2}; -\dfrac{1}{2}\right)$, (1; –2), (–2; 1).

b) Vì x = 0 không là nghiệm của phương trình nên ta chia vế trái của phương trình cho x ta được :

$$\frac{2}{\dfrac{3x^2 - 5x + 2}{x}} + \frac{13}{\dfrac{3x^2 + x + 2}{x}} = 6 \Leftrightarrow \frac{2}{3x + \dfrac{2}{x} - 5} + \frac{13}{3x + \dfrac{2}{x} + 1} = 6 \quad (*)$$

Đặt $y = 3x + \dfrac{2}{x} - 5$ (*) được viết lại :

$$\frac{2}{y} + \frac{13}{y + 6} = 6 \Leftrightarrow 2y^2 + 7y - 4 = 0$$

Giải phương trình này ta được : $y_1 = \dfrac{1}{2}$; $y_2 = -4$.

Với $y_1 = \dfrac{1}{2} \Leftrightarrow 3x + \dfrac{2}{x} - 5 = \dfrac{1}{2} \Leftrightarrow 6x^2 - 11x + 4 = 0 \Rightarrow x_1 = \dfrac{4}{3}, x_2 = \dfrac{1}{2}$

Với $y_2 = -4 \Leftrightarrow 3x + \dfrac{2}{x} - 5 = -4 \Leftrightarrow 3x^2 - x + 2 = 0$ (vô nghiệm).

Vậy phương trình đã cho có hai nghiệm $x_1 = \frac{4}{3}$, $x_2 = \frac{1}{2}$.

Câu 3.

a) Ta có $2(a^4 + b^4 \geq ab^3 + a^3b + 2a^2b^2$.

$\Leftrightarrow \quad 4(a^4 + b^4) \geq 2ab^3 + 2a^3b + 4a^2b^2$

$\Leftrightarrow \quad (b^4 - 2ab^3 + a^2b^2) + (a^4 - 2a^3b + a^2b^2) + (3a^4 + 3b^4 - 6a^2b^2) \geq 0$

$\Leftrightarrow \quad (b^2 - ab)^2 + (a^2 - ab)^2 + 3(a^2 - b^2)^2 \geq 0$ (đúng)

Vậy bất đẳng thức đã cho đúng.

b) Với $a > b > 0$ thì $\sqrt{a^2 - b^2} + \sqrt{2ab - b^2} > a$

$\Leftrightarrow \quad (a^2 - b^2) + (2ab - b^2) + 2\sqrt{(a^2 - b^2)(2ab - b^2)} > a^2$

$\Leftrightarrow \quad 2b(a - b) + 2\sqrt{(a^2 - b^2)(2ab - b^2)} > 0$ (đúng)

Vậy bất đẳng thức đã cho đúng.

Câu 4. Gọi số cần tìm là $\overline{ab}$ (a, b khác 0). Từ giả thiết có $\overline{ab} = m.ab$.

Suy ra : $10a + b = mab$, hay $b = a(mb - 10)$, suy ra b chia hết cho a.

Đặt $b = na$ $(n \leq 9)$.

Từ $na = a(mna - 10)$ có $n = mna - 10 \Leftrightarrow n(ma - 1) = 10$ nên chia hết cho $n \Rightarrow n \in \{1, 2, 5\}$.

- Với $n = 1$ thì $ma - 1 = 10 \Leftrightarrow ma = 11$, suy ra $a = b = 1$.
- Với $n = 2$ thì $ma - 1 = 5 \Rightarrow ma = 6 \Rightarrow a = 1, 2, 3$, tương ứng có $b = 2, 4, 6$
- Với $n = 5$ thì $ma - 1 = 2 \Leftrightarrow ma = 3 \Rightarrow a = 1$, tương ứng có $b = 5$.

Thử lại ta có các số cần tìm là : 11, 12, 15, 24, 36.

Câu 5. *(Hình 3)*

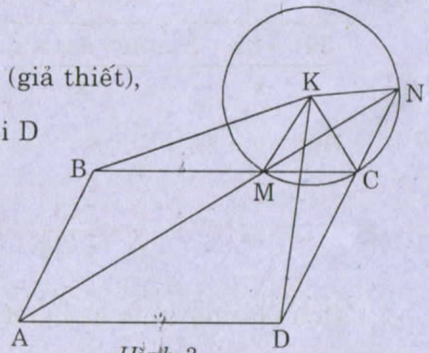
a) Ta có $\widehat{BAN} = \widehat{DNA}$, mà $\widehat{BAN} = \widehat{DAN}$ (giả thiết),

suy ra $\widehat{DAN} = \widehat{DNA}$ hay ΔDNA cân tại D

$\Rightarrow DN = AD = BC$.

Nhận thấy ΔCMN cân tại C nên $CM = CN$, kết hợp với $KM = KN$

$\Rightarrow CK \perp MN$.



Hình 3

b) Xét hai tam giác KBC và KDN có :

$BC = DN$, $KC = KN$, $\widehat{KCB} = \widehat{KND}$ $(= \widehat{KMC})$

$\Rightarrow \Delta KBC = \Delta KDN$, suy ra $\widehat{KBC} = \widehat{KDC}$ hay tứ giác BKCD là tứ giác nội tiếp (đpcm).

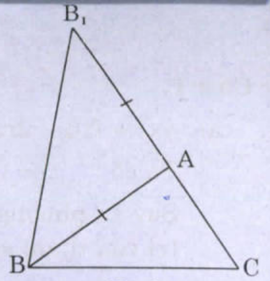
Câu 6. *(Hình 4)*

Trên tia đối của tia AC chọn B_1 sao cho $AB_1 = AB$

lúc đó $\widehat{BAC} = 2\widehat{BB_1C}$, mà $\widehat{BAC} = 2\widehat{ABC}$

$\Rightarrow \widehat{BB_1C} = \widehat{ABC}$, suy ra $\Delta BB_1C \backsim \Delta ABC$.

Từ đó : $\frac{B_1C}{BC} = \frac{BC}{AC}$ Hay $BC^2 = AC(AB + AC)$.



Hình 4

ĐỀ 4

TRƯỜNG PTTH CHUYÊN LÊ HỒNG PHONG, TPHCM

Đề thi tuyển sinh vào lớp 10 (Ban A, B) năm học 2005 – 2006

Câu 1. Cho phương trình (có ẩn số là x) : $4x^2 + 2(3 - 2m)x + m^2 - 3m + 2 = 0$.

a) Chứng tỏ rằng phương trình trên luôn có nghiệm với mọi giá trị của tham số m.

b) Tìm m để có tích của hai nghiệm đạt giá trị nhỏ nhất.

Câu 2. Giải các phương trình và hệ phương trình :

a) $\begin{cases} x^2 + y^2 = 2(xy + 2) \\ x + y = 6 \end{cases}$ **b)** $x^2 + \frac{25x^2}{(x + 5)^2} = 11$.

Câu 3.

a) Cho $a > c$, $b > c$, $c > 0$. Chứng minh : $\sqrt{c(a - c)} + \sqrt{c(b - c)} \leq \sqrt{ab}$.

b) Cho $a > 0$, $b > 0$. Chứng minh : $\frac{2\sqrt{ab}}{\sqrt{a} + \sqrt{b}} \leq \sqrt{\sqrt{ab}}$.

Câu 4. Tìm số chính phương có 4 chữ số biết rằng khi tăng thêm mỗi chữ số một đơn vị thì số mới được tạo thành cũng là một số chính phương.

Câu 5. Cho tam giác ABC có ba góc nhọn nội tiếp trong đường tròn (O; R), số đo góc C bằng 45^0. Đường tròn đường kính AB cắt các cạnh AC và BC lần lượt tại M và N.

a) Chứng minh MN vuông góc với OC. **b)** Chứng minh $MN = \frac{AB}{\sqrt{2}}$.

Câu 6. Cho tam giác ABC có ba góc nhọn nội tiếp đường tròn (O; R). Điểm M di động trên cung nhỏ BC. Từ M kẻ các đường thẳng MH, MK lần lượt vuông góc với AB, AC (H thuộc đường thẳng AB, K thuộc đường thẳng AC).

a) Chứng minh hai tam giác MBC và MHK đồng dạng với nhau.

b) Tìm vị trí của M để độ dài đoạn HK lớn nhất.

BÀI GIẢI

Câu 1.

a) $4x^2 + 2(3 - 2m)x + m^2 - 3m + 2 = 0$

Ta có : $\Delta' = (3 - 2m)^2 - 4(m^2 - 3m + 2) = 1 > 0.$

Suy ra phương trình đã cho có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 với mọi giá trị của tham số m.

b) Theo định lí Viet : $x_1x_2 = \dfrac{m^2 - 3m + 2}{4} = \dfrac{1}{4}\left(m - \dfrac{3}{2}\right)^2 - \dfrac{1}{16} \geq -\dfrac{1}{16}.$

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow$ $m = \dfrac{3}{2}.$

Vậy giá trị nhỏ nhất của $x_1.x_2$ là $\left(-\dfrac{1}{16}\right)$ đạt được khi $m = \dfrac{3}{2}.$

Câu 2.

a) $\begin{cases} x^2 + y^2 = 2(xy + 2) \\ x + y = 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 = 4xy + 4 \\ x + y = 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + y = 6 \\ x.y = 8 \end{cases}$

Giải ra ta được hệ có hai nghiệm (x; y) là : (4; 2), (2; 4).

b) Điều kiện $x \neq -5$. Phương trình đã cho tương đương với :

$$x^2 + \frac{25x^2}{(x+5)^2} = 11 \Leftrightarrow \left(x - \frac{5x}{x+5}\right)^2 + 10\left(\frac{x^2}{x+5}\right) = 11$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{x^2}{x+5}\right)^2 + 10\left(\frac{x^2}{x+5}\right) = 11.$$

Đặt $y = \dfrac{x^2}{x+5}$ (1). Phương trình trên trở thành : $y^2 + 10y - 11 = 0$

Giải ra ta được $y_1 = 1$, $y_2 = -11$.

- Với $y_2 = -11$, thay vào (1) thấy phương trình ẩn x vô nghiệm.
- Với $y_1 = 1$, từ (1) ta có phương trình $x^2 - x + 5 = 0$. Giải ra ta được :

$$x_1 = \frac{1 + \sqrt{21}}{2}, \quad x_2 = \frac{1 - \sqrt{21}}{2}$$

Thử lại ta thấy $x_1 = \dfrac{1 + \sqrt{21}}{2}$, $x_2 = \dfrac{1 - \sqrt{21}}{2}$ là hai nghiệm của phương trình đã cho.

Câu 3.

a) Áp dụng bất đẳng thức Côsi cho hai số dương, ta có :

$$\sqrt{\frac{c(a-c)}{ab}} + \sqrt{\frac{c(b-c)}{ab}} = \sqrt{\frac{c}{b}\left(\frac{a-c}{a}\right)} + \sqrt{\frac{c}{a}\left(\frac{b-c}{b}\right)} \leq$$

$$\leq \frac{1}{2}\left(\frac{c}{b} + \frac{a-c}{a}\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{c}{a} + \frac{b-c}{b}\right) = 1 \Rightarrow \text{đpcm.}$$

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow \dfrac{bc}{b - c} = a.$

b) Áp dụng bất đẳng thức Côsi cho hai số dương, ta có :

$$2\sqrt{\sqrt{a}.\sqrt{b}} \leq \sqrt{a} + \sqrt{b} \quad \Rightarrow \quad 2\sqrt{\sqrt{a}.\sqrt{b}}.\frac{\sqrt{\sqrt{a}.\sqrt{b}}}{\sqrt{a} + \sqrt{b}} \leq (\sqrt{a} + \sqrt{b}).\frac{\sqrt{\sqrt{a}.\sqrt{b}}}{\sqrt{a} + \sqrt{b}}.$$

Suy ra $\dfrac{2\sqrt{ab}}{\sqrt{a} + \sqrt{b}} \leq \sqrt{\sqrt{a}.\sqrt{b}}.$

Câu 4. Gọi số chính phương có bốn chữ số cần tìm là $\overline{abcd}$ $(a \neq 0)$.

Đặt $n^2 = \overline{abcd}$ $(n \in N^*)$. Ta có $n^2 < 10000$ nên $n < 100$.

Khi tăng mỗi chữ số của số $\overline{abcd}$ lên một đơn vị thì được số :

$$\overline{(a+1)(b+1)(c+1)(d+1)}.$$

Theo giả thiết $\overline{(a+1)(b+1)(c+1)(d+1)} = m^2$ $(m \in N^*)$. Tương tự như trên có $m < 100$.

Suy ra $2 \leq m + n < 200$.

Xét : $m^2 - n^2 = \overline{(a+1)(b+1)(c+1)(d+1)} - \overline{abcd} = 1111.$

Hay $(m - n)(m + n) = 1111.$

Vì $1111 = 1.1111 = 11.101$, nên chỉ xảy ra $m - n = 11$ và $m + n = 101$, suy ra $m = 56$, $n = 45$.

Vậy $\overline{abcd} = 45^2 = 2025$. Thử lại ta thấy số cần tìm là 2025.

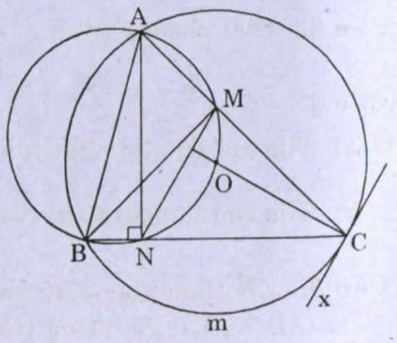
Câu 5. *(Hình 5)*

a) Kẻ tiếp tuyến Cx với đường tròn (O), khi đó $\widehat{BAC} = \widehat{BCx}$ (cùng chắn cung $\overparen{BmC}$);

Mặt khác $\widehat{BAC} = \widehat{MNC}$ (cùng bù với $\widehat{MNB}$)

Suy ra $\widehat{MNC} = \widehat{BCx}$, từ đó $MN \,//\, Cx$

Mặt khác $Cx \perp OC$ nên $MN \perp OC$.



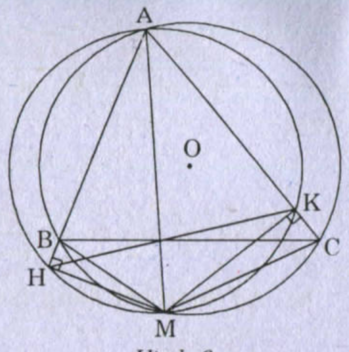
Hình 5

b) Ta thấy $\Delta CMN \backsim \Delta CBA$.

$$\Rightarrow \frac{MN}{AB} = \frac{CN}{AC} = \frac{1}{\sqrt{2}} \text{ (vì } \Delta ACN \text{ cân tại N)} \Rightarrow MN = \frac{AB}{\sqrt{2}}.$$

THƯ VIỆN TỈNH BÌNH THUẬN

Câu 6. *(Hình 6)*



Hình 6

a) Bốn điểm A, H, M, K cùng nằm trên một đường tròn đường kính AM.

Ta có : $\widehat{MBC} = \widehat{MAC} = \widehat{MHK}$,

$\widehat{MCB} = \widehat{MAB} = \widehat{MKH}$.

Suy ra tam giác MBC đồng dạng với tam giác MHK.

b) Theo trên $\Delta MBC \backsim \Delta MHK$, suy ra

$$\frac{BC}{HK} = \frac{MB}{MH}, \quad \text{mà} \quad MB \geq MH \quad \Rightarrow \quad \frac{BC}{HK} \geq 1 \quad \Rightarrow \quad HK \leq BC.$$

Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow H \equiv B$, lúc đó $\widehat{ABM} = 90^0 \Leftrightarrow$ AM là đường kính của đường tròn (O). Do đó khi M là điểm đối xứng của A qua O thì độ dài HK lớn nhất.

ĐỀ 5

TRƯỜNG PTTH CHUYÊN LÊ HỒNG PHONG, TPHCM

Đề thi tuyển sinh vào lớp 10 chuyên Toán năm học 2004 – 2005

Câu 1. Giải hệ : $\begin{cases} \dfrac{3}{2x - y} - \dfrac{6}{x + y} = -1 \\ \dfrac{1}{2x - y} - \dfrac{1}{x + y} = 0 \end{cases}$

Câu 2. Cho x > 0 thỏa : $x^2 + \dfrac{1}{x^2} = 7$. Tính $x^5 + \dfrac{1}{x^5}$.

Câu 3. Giải phương trình : $\dfrac{3x}{\sqrt{3x + 10}} = \sqrt{3x + 1} - 1$.

Câu 4.

a) Tìm giá trị nhỏ nhất của $P = 5x^2 + 9y^2 - 12xy + 24x - 48y + 82$.

b) Tìm các số nguyên x, y, z thỏa hệ : $\begin{cases} x + y + z = 3 \\ x^3 + y^3 + z^3 = 3 \end{cases}$

Câu 5. Cho tam giác ABC có 3 góc nhọn nội tiếp trong đường tròn tâm O (AB < AC). Vẽ đường tròn tâm I qua 2 điểm A, C cắt đoạn AB, BC lần lượt tại M, N. Vẽ đường tròn tâm J qua 3 điểm B, M, N cắt đường tròn (O) tại điểm H (khác B).

a) Chứng minh : OB vuông góc với MN.

b) Chứng minh : tứ giác IOBJ là hình bình hành.

c) Chứng minh : BH vuông góc với IH.

Câu 6. Cho hình bình hành ABCD. Qua một điểm S trong hình bình hành ABCD kẻ đường thẳng song song với AB lần lượt cắt AD, BC tại M, P và cũng qua S kẻ đường thẳng song song với AD lần lượt cắt AB, CD tại N, Q. Chứng minh 3 đường thẳng AS, BQ, DP đồng quy.

BÀI GIẢI

Câu 1. $\begin{cases} \dfrac{3}{2x - y} - \dfrac{6}{x + y} = -1 \\ \dfrac{1}{2x - y} - \dfrac{1}{x + y} = 0 \end{cases}$ Điều kiện : $2x - y \neq 0$; $x + y \neq 0$

Đặt $a = \dfrac{1}{2x - y}$; $b = \dfrac{1}{x + y}$.

Hệ đã cho được viết lại : $\begin{cases} 3a - 6b = -1 \\ a - b = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \dfrac{1}{3} \\ a = b \end{cases} \Leftrightarrow a = b = \dfrac{1}{3}$.

Giải hệ $\begin{cases} \dfrac{1}{2x - y} = \dfrac{1}{3} \\ \dfrac{1}{x + y} = \dfrac{1}{3} \end{cases}$ ta được nghiệm (x; y) = (2; 1).

Câu 2. Ta có : $\left(x + \dfrac{1}{x}\right)\left(x^4 + \dfrac{1}{x^4}\right) = x^5 + \dfrac{1}{x^5} + \dfrac{1}{x^3} + x^3$

Suy ra : $x^5 + \dfrac{1}{x^5} = \left(x + \dfrac{1}{x}\right)\left(x^4 + \dfrac{1}{x^4}\right) - \left(\dfrac{1}{x^3} + x^3\right)$

Dễ dàng tính được các tổng sau :

$\left(x + \dfrac{1}{x}\right)^2 = x^2 + 2 + \dfrac{1}{x^2} = 9 \quad \Rightarrow \quad x + \dfrac{1}{x} = 3$ (vì x > 0)

$\left(x + \dfrac{1}{x}\right)^3 = x^3 + \dfrac{1}{x^3} + 3\left(x + \dfrac{1}{x}\right) \Rightarrow \quad x^3 + \dfrac{1}{x^3} = \left(x + \dfrac{1}{x}\right)^3 - 3\left(x + \dfrac{1}{x}\right) = 18$

Vậy : $\left(x^5 + \dfrac{1}{x^5}\right) = \left(x + \dfrac{1}{x}\right)\left(x^4 + \dfrac{1}{x^4}\right) - \left(\dfrac{1}{x^3} + x^3\right) = 3.47 - 18 = 123$.

Câu 3. Điều kiện : $x \geq -\dfrac{1}{3}$.

Phương trình đã cho được viết dưới dạng :

$$\frac{3x}{\sqrt{3x+10}}\left(\sqrt{3x+1}+1\right)=\left(\sqrt{3x+1}\right)^2-1^2 \quad\Leftrightarrow\quad \left[\begin{array}{l} x=0 \\ \dfrac{\sqrt{3x+1}+1}{\sqrt{3x+10}}=1 \quad (*) \end{array}\right.$$

$$(*) \quad\Leftrightarrow\quad \sqrt{3x+1}+1=\sqrt{3x+10} \quad\Leftrightarrow\quad \sqrt{3x+1}=4 \quad\Leftrightarrow\quad x=5.$$

Vậy phương trình có 2 nghiệm là : $x = 0$; $x = 5$.

Câu 4.

a) Ta có : $P = 5x^2 + 9y^2 - 12xy + 24x - 48y + 82$

$$= (x^2 - 8x + 16) + (4x^2 + 9y^2 - 12xy + 32x - 48y + 64) + 2$$

$$= (x-4)^2 + (2x - 3y + 8)^2 + 2 \geq 2.$$

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow \begin{cases} x = 4 \\ 2x - 3y + 8 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 4 \\ y = \dfrac{16}{3} \end{cases}$

Vậy giá trị nhỏ nhất của P là 2, đạt được khi $x = 4$ và $y = \dfrac{16}{3}$.

b) $\begin{cases} x + y + z = 3 & (1) \\ x^3 + y^3 + z^3 = 3 & (2) \end{cases}$

$$(1) \Leftrightarrow (x+y)^3 = (3-z)^3$$

$$\Leftrightarrow x^3 + y^3 + 3xy(x+y) = 27 - 27z + 9z^2 - z^3$$

Từ (2) $\Rightarrow$ $3 - z^3 + 3xy(3 - z) = 27 - 27z + 9z^2 - z^3$

$$\Leftrightarrow 1 + xy(3-z) = 9 - 9z + 3z^2 \quad\Leftrightarrow\quad (3-z)(xy+3z) = 8$$

Vậy các nghiệm nguyên của phương trình là :

$(1; 1; 1)$, $(4; 4; -5)$, $(4; -5; 4)$, $(-5; 4; 4)$.

Câu 5. *(Hình 7)*

a) Vẽ tiếp tuyến (d) tại B của đường tròn (O).

Ta có : $\widehat{B}_1 = \widehat{C}_1$ (góc tạo bởi một dây và tiếp tuyến cùng chắn $\overset{\frown}{AB}$ của (O)).

Mà $\widehat{M}_1 = \widehat{C}_1 \Rightarrow \widehat{B}_1 = \widehat{M}_1$

$\Rightarrow$ MN // (d)

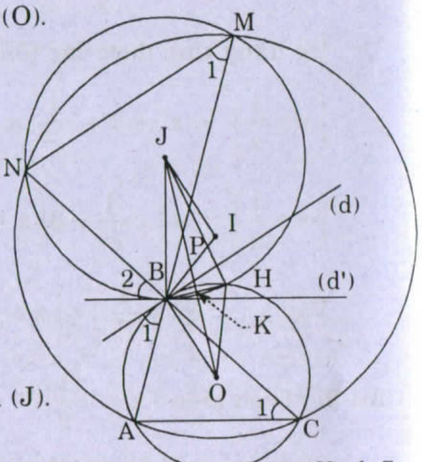
Mà OB $\perp$ (d) tại B (d là tiếp tuyến tại B của đường tròn (O)).

Suy ra OB $\perp$ MN.

b) Vẽ tiếp tuyến (d') tại B của đường tròn (J).

Ta có $\widehat{B}_2 = \widehat{M}_1$. Mà $\widehat{C}_1 = \widehat{M}_1$.

Suy ra $\widehat{B}_2 = \widehat{C}_1 \Rightarrow$ (d') // AC



Hình 7

Mà (d') $\perp$ JB tại B. Suy ra AC $\perp$ JB.

Mà AC $\perp$ OI (OI là đường thẳng nối tâm) $\Rightarrow$ JB // OI (1)

Mặt khác OB $\perp$ MN (chứng minh câu a)).

Mà IJ $\perp$ MN $\Rightarrow$ OB // IJ (2)

Từ (1) và (2) suy ra OIBJ là hình bình hành.

c) Ta có OJ $\perp$ BH tại trung điểm K của đoạn HB.

Gọi P là trung điểm của OJ thì P cũng là trung điểm của đoạn BI.

Vậy PK là đường trung bình của tam giác BHI.

Suy ra PK // IH $\Rightarrow$ IH $\perp$ HB (đpcm).

Câu 6. *(Hình 8)*

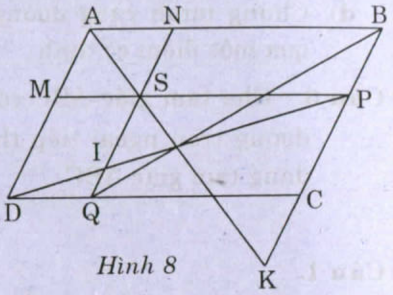
Gọi I là giao điểm của DP với NQ.

Gọi K là giao điểm của AS với BC.

Ta có $\dfrac{KP}{BP} = \dfrac{KP}{AM} = \dfrac{SP}{SM} = \dfrac{SP}{DQ} = \dfrac{IS}{IQ}$

Vậy : $\dfrac{KP}{BP} = \dfrac{IS}{IQ}$.

Suy ra SK, IP, BQ đồng quy.



Hình 8

ĐỀ 6

TRƯỜNG PTTH CHUYÊN LÊ HỒNG PHONG, TPHCM

Đề thi tuyển sinh vào lớp 10 (Ban A, B) năm học 2003 – 2004

Câu 1. Cho phương trình $x^2 - 2mx - 6m - 9 = 0$ (có ẩn số là x).

a) Tìm m để phương trình có hai nghiệm phân biệt đều âm.

b) Gọi x_1, x_2 là hai nghiệm của phương trình. Tìm m để có $x_1^2 + x_2^2 = 13$.

Câu 2.

a) Cho $x > 0$, $y > 0$ và $x + y \leq 1$. Chứng minh : $\dfrac{1}{x^2 + xy} + \dfrac{1}{y^2 + xy} \geq 4$.

b) Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $A' = \dfrac{3}{2 + \sqrt{2x - x^2 + 7}}$.

Câu 3. Giải hệ phương trình :

a) $\begin{cases} x + y + xy = 11 \\ x^2y + xy^2 = 30 \end{cases}$ **b)** $\begin{cases} xy = -64 \\ \dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{y} = \dfrac{1}{4} \end{cases}$

Câu 4. Chứng minh rằng nếu $a + b \ge 2$ thì ít nhất một trong hai phương trình sau có nghiệm : $x^2 + 2ax + b = 0$; $x^2 + 2bx + a = 0$.

Câu 5. Cho đường tròn tâm O đường kính AB. Gọi K là trung điểm của cung $\overset{\frown}{AB}$, M là điểm di động trên cung nhỏ $\overset{\frown}{AK}$ (M khác điểm A và K). Lấy điểm N trên đoạn BM sao cho BN = AM.

a) Chứng minh $\widehat{AMK} = \widehat{BNK}$.

b) Chứng minh tam giác MNK là tam giác vuông cân.

c) Hai đường thẳng AM và OK cắt nhau tại D. Chứng minh MK là đường phân giác của góc $\widehat{DMN}$.

d) Chứng minh rằng đường thẳng vuông góc với BM tại N luôn luôn đi qua một điểm cố định.

Câu 6. Cho tam giác ABC có BC = a, CA = b, AB = c và có R là bán kính đường tròn ngoại tiếp thỏa mãn hệ thức : $R(b + c) = a\sqrt{bc}$. Hãy định dạng tam giác ABC.

BÀI GIẢI

Câu 1.

a) Phương trình có hai nghiệm phân biệt đều âm khi và chỉ khi :

$$\begin{cases} \Delta' > 0 \\ S < 0 \\ P > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m^2 + 6m + 9 > 0 \\ 2m < 0 \\ -6m - 9 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \quad m < -\frac{3}{2} \text{ và } m \ne -3.$$

b) Theo định Viet ta có : $x_1 + x_2 = 2m$; $\quad x_1x_2 = -6m - 9$.

Do đó : $\quad x_1^2 + x_2^2 = 13 \Leftrightarrow (x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2 = 13$

$$\Leftrightarrow \quad 4m^2 + 12m + 5 = 0 \Rightarrow \quad m = -\frac{1}{2}; \quad m = -\frac{5}{2}.$$

Câu 2.

a) Nhận xét rằng với a, b là các số dương thì $\dfrac{1}{a} + \dfrac{1}{b} \ge \dfrac{4}{a + b}$.

Từ đó ta có : $$\frac{1}{x^2 + xy} + \frac{1}{y^2 + xy} \ge \frac{4}{(x^2 + xy) + (y^2 + xy)} = \frac{4}{(x + y)^2} \qquad (*)$$

Vì x, y > 0 và $x + y \le 1$ nên $\dfrac{4}{(x + y)^2} \ge 4$.

Từ (*) suy ra : $\dfrac{1}{x^2 + xy} + \dfrac{1}{y^2 + xy} \ge 4$.

b) Điều kiện : $-x^2 + 2x + 7 \ge 0 \Leftrightarrow 1 - 2\sqrt{2} \le x \le 1 + 2\sqrt{2}$

Ta có : $-x^2 + 2x + 7 = -(x - 1)^2 + 8 \le 8$.

Do đó : $$A = \frac{3}{2 + \sqrt{2x - x^2 + 7}} \ge \frac{3\left(\sqrt{2} - 1\right)}{2}.$$

Vậy giá trị nhỏ nhất của biểu thức A là $\dfrac{3\left(\sqrt{2} - 1\right)}{2}$, đạt được khi x = 1.

Câu 3.

a) Đặt $u = x + y$, $\quad v = x.y$. Hệ đã cho có dạng $\begin{cases} u + v = 11 \\ u.v = 30 \end{cases}$

Giải hệ này tìm được (u; v) = (6; 5), (5; 6).

Giải hệ : $\begin{cases} x + y = 6 \\ xy = 5 \end{cases}$ và $\begin{cases} x + y = 5 \\ xy = 6 \end{cases}$

ta được bốn nghiệm (x; y) sau : (1; 5), (5; 1), (2; 3), (3; 2).

b) Điều kiện : $x \ne 0$ và $y \ne 0$.

$$\begin{cases} xy = -64 \\ \dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{y} = \dfrac{1}{4} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} xy = -64 \\ \dfrac{y - x}{xy} = \dfrac{1}{4} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} xy = -64 \\ \dfrac{y - x}{-64} = \dfrac{1}{4} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} xy = -64 \\ x - y = 16 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (y + 16)y = -64 \\ x - y = 16 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y^2 + 16y + 64 = 0 \\ x - y = 16 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 8 \\ y = -8 \end{cases}$$

Vậy nghiệm (x; y) của hệ phương trình là (8; –8).

Câu 4. Phương trình $x^2 + 2ax + b = 0$ có biệt số $\Delta_1' = a^2 - b$.

Phương trình $x^2 + 2bx + a = 0$ có biệt số $\Delta_2' = b^2 - a$.

Ta có : $\Delta_1' + \Delta_2' = (a^2 - b) + (b^2 - a) = (a - 1)^2 + (b - 1)^2 + (a + b - 2) \ge 0$.

Do đó trong hai số Δ_1', Δ_2' có ít nhất một số không âm nghĩa là có ít nhất một trong hai phương trình đã cho có nghiệm.

Câu 5. *(Hình 9)*

a) Ta có : $\Delta AKM = \Delta BNK$ (c.g.c). Suy ra $\widehat{AMK} = \widehat{BNK}$.

b) Từ kết quả câu a) $\Delta AMK = \Delta BNK$.

Ta có : $\quad KM = KN \quad$ và $\quad \widehat{AKM} = \widehat{BKN}$.

Mà $\quad \widehat{BKN} + \widehat{AKN} = 90^0 \Rightarrow \widehat{AKM} + \widehat{AKN} = 90^0$.

Do đó tam giác KMN vuông cân tại K.

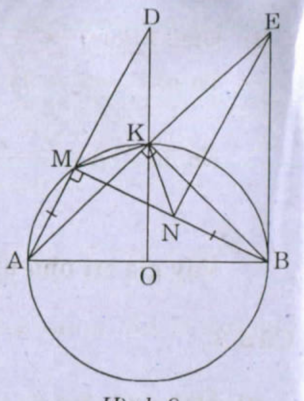
c) Từ kết quả câu b) tam giác MKN vuông cân tại K nên $\widehat{NMK} = 45^0$.

Do $\widehat{DMN} = 90^0 \quad \Rightarrow \quad \widehat{DMK} = 45^0$.

Suy ra MK là đường phân giác của $\widehat{DMN}$.

d) Giả sử đường thẳng vuông góc với BM tại N cắt đường thẳng AK tại E. Nhận thấy rằng tứ giác BEKN nội tiếp, suy ra $\widehat{AEB} = \widehat{MNK} = 45^0$.

Mặt khác $\widehat{BAE} = 45^0$ nên tam giác ABE vuông cân tại B, dẫn tới E cố định (đpcm).



Hình 9

Câu 6. Từ mối quan hệ giữa độ dài đường kính và dây cung ta có :

$$2R \ge BC = a \quad \text{và} \quad b + c \ge 2\sqrt{bc}, \quad \text{suy ra} \quad R(b + c) \ge a\sqrt{bc}.$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi tam giác ABC vuông cân tại A. Từ đó $R(b + c) = a\sqrt{bc}$ thì tam giác ABC vuông cân tại A.

ĐỀ 7

TRƯỜNG PTTH CHUYÊN LÊ HỒNG PHONG, TPHCM

Đề thi tuyển sinh vào lớp 10 chuyên Toán năm học 2003 – 2004

Câu 1.

a) Thu gọn biểu thức $A = \dfrac{1}{\sqrt{2} - \sqrt{3}} \cdot \sqrt{\dfrac{3\sqrt{2} - 2\sqrt{3}}{3\sqrt{2} + 2\sqrt{3}}}$

b) Tìm giá trị nhỏ nhất của : $y = \sqrt{x - 1 - 2\sqrt{x - 2}} + \sqrt{x + 7 - 6\sqrt{x - 2}}$.

Câu 2. Giải các phương trình và hệ phương trình :

a) $\begin{cases} x + y + xy = 2 + 3\sqrt{2} \\ y^2 + x^2 = 6 \end{cases}$ **b)** $\dfrac{x^3}{\sqrt{4 - x^2}} + x^2 - 4 = 0.$

Câu 3. Phân tích thành nhân tử : $A = x^4 - 5x^3 + 10x + 4$.

Áp dụng : Giải phương trình : $\dfrac{x^4 + 4}{x^2 - 2} = 5x$.

Câu 4. Cho hai phương trình : $ax^2 + bx + c = 0, \quad a \ne 0 \qquad (1)$

$mx^2 + mx + p = 0, \quad m \ne 0 \qquad (2)$

Chứng minh rằng nếu ít nhất một trong hai phương trình trên vô nghiệm thì phương trình sau luôn có nghiệm :

$$(an - mb)x^2 + 2(ap - mc)x + bp - nc = 0.$$

Câu 5. Cho tam giác ABC vuông tại A (AB < AC) có đường cao AH và trung tuyến AM. Vẽ đường tròn tâm H bán kính AH, cắt AB ở điểm D, cắt AC ở điểm E (D và E khác điểm A).

a) Chứng minh : D, H, E thẳng hàng.

b) Chứng minh : $\widehat{MAE} = \widehat{ADE}$ và MA vuông góc với DE.

c) Chứng minh bốn điểm B, C, D, E cùng thuộc một đường tròn tâm là O. Tứ giác AMOH là hình gì ?

d) Cho góc $\widehat{ACB} = 30^0$ và AH = a. Tính diện tích tam giác HEC.

Câu 6. Cho hình thang ABCD có hai đường chéo AC và BD cùng bằng cạnh đáy lớn AB. Gọi M là trung điểm của CD. Cho biết $\widehat{MBC} = \widehat{CAB}$. Tính các góc của hình thang ABCD.

BÀI GIẢI

Câu 1.

a) $$A = \frac{1}{\sqrt{2} - \sqrt{3}} \cdot \sqrt{\frac{3\sqrt{2} - 2\sqrt{3}}{3\sqrt{2} + 2\sqrt{3}}} = \frac{1}{\sqrt{2} - \sqrt{3}} \cdot \sqrt{\frac{\sqrt{6}\left(\sqrt{3} - \sqrt{2}\right)}{\sqrt{6}\left(\sqrt{3} + \sqrt{2}\right)}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2} - \sqrt{3}} \cdot \sqrt{\frac{\left(\sqrt{3} - \sqrt{2}\right)}{\sqrt{3} + \sqrt{2}}} = \frac{1}{\sqrt{2} - \sqrt{3}} \cdot \sqrt{\frac{\left(\sqrt{3} - \sqrt{2}\right)\left(\sqrt{3} - \sqrt{2}\right)}{3 - 2}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2} - \sqrt{3}} \cdot \left|\sqrt{3} - \sqrt{2}\right| = \frac{1}{-\left(\sqrt{3} - \sqrt{2}\right)} \cdot \left(\sqrt{3} - \sqrt{2}\right)$$

$$= -1 \quad (\text{vì } \sqrt{3} - \sqrt{2} > 0)$$

Vậy $A = -1$.

b) Điều kiện : $x \ge 2$.

$$y = \sqrt{x - 1 - 2\sqrt{x - 2}} + \sqrt{x + 7 - 6\sqrt{x - 2}}$$

$$= \sqrt{x - 2 - 2\sqrt{x - 2} + 1} + \sqrt{x - 2 - 6\sqrt{x - 2} + 9}$$

$$= \sqrt{\left(\sqrt{x - 2} - 1\right)^2} + \sqrt{\left(3 - \sqrt{x - 2}\right)^2} = \left|\sqrt{x - 2} - 1\right| + \left|3 - \sqrt{x - 2}\right|$$

Áp dụng : $|A| \ge A$. Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow$ $A \ge 0$.

Ta có : $y \ge \sqrt{x - 2} - 1 + 3 - \sqrt{x - 2} = 2$

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{x-2} - 1 \ge 0 \\ 3 - \sqrt{x-2} \ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow 1 \le \sqrt{x-2} \le 3$

$\Leftrightarrow 1 \le x - 2 \le 9 \quad \Leftrightarrow \quad 3 \le x \le 11$

Vậy giá trị nhỏ nhất của y là 2 $\Leftrightarrow 3 \le x \le 11$.

Câu 2.

a) $\begin{cases} x + y + xy = 2 + 3\sqrt{2} & (1) \\ y^2 + x^2 = 6 & (2) \end{cases}$

Ta có : $y^2 + x^2 + 2(x + y + xy) = 6 + 2\left(2 + 3\sqrt{2}\right)$

$\Leftrightarrow (x^2 + 2xy + y^2) + 2(x + y) = 6 + 4 + 6\sqrt{2}$

$\Leftrightarrow (x + y)^2 + 2(x + y) + 1 = 3^2 + 2.3\sqrt{2} + (\sqrt{2})^2$

$\Leftrightarrow (x + y + 1)^2 = \left(3 + \sqrt{2}\right)^2$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x + y + 1 = 3 + \sqrt{2} \\ x + y + 1 = -3 - \sqrt{2} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} x + y = 2 + \sqrt{2} & (3) \\ x + y = -4 - \sqrt{2} & (4) \end{array}\right.$

Từ (1) và (3) có $xy = 2\sqrt{2}$

$\begin{cases} xy = 2\sqrt{2} \\ x + y = 2 + \sqrt{2} \end{cases}$

Nên x, y là nghiệm của phương trình : $X^2 - \left(2 + \sqrt{2}\right)X + 2\sqrt{2} = 0$ (*)

Nghiệm của (*) là : $X_1 = 2; \quad X_2 = \sqrt{2}$.

Ta có : $\begin{cases} x = 2 \\ y = \sqrt{2} \end{cases}; \quad \begin{cases} x = \sqrt{2} \\ y = 2 \end{cases}$

Từ (1) và (4) ta có : $xy = 6 + 4\sqrt{2}$

$(x - y)^2 = y^2 + x^2 - 2xy = 6 - 12 - 8\sqrt{2} = -6 - 8\sqrt{2} < 0$ (loại).

Vậy nghiệm của hệ phương trình đã cho là : $\begin{cases} x = 2 \\ y = \sqrt{2} \end{cases}; \quad \begin{cases} x = \sqrt{2} \\ y = 2 \end{cases}$.

b) $\dfrac{x^3}{\sqrt{4 - x^2}} + x^2 - 4 = 0$ (Điều kiện : $-2 < x < 2$)

$\Leftrightarrow \dfrac{x^3}{\sqrt{4 - x^2}} = 4 - x^2 \quad \Leftrightarrow \quad x^3 = \left(\sqrt{4 - x^2}\right)^3 \quad \Leftrightarrow \quad x = \sqrt{4 - x^2}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x \ge 0 \\ x^2 = 4 - x^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \ge 0 \\ 2x^2 = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \quad x = \sqrt{2}$ (thỏa đk $-2 < x < 2$)

Vậy nghiệm của phương trình đã cho là $x = \sqrt{2}$.

Câu 3. $A = x^4 - 5x^3 + 10x + 4$

$= x^4 - x^3 - 2x^2 - 4x^3 + 4x^2 + 8x - 2x^2 + 2x + 4$

$= x^2(x^2 - x - 2) - 4x(x^2 - x - 2) - 2(x^2 - x - 2)$

$= (x^2 - x - 2)(x^2 - 4x - 2) = (x^2 - 2x + x - 2)(x^2 - 4x - 2)$

$= [x(x - 2) + (x - 2)](x^2 - 4x - 2)$

Vậy $A = (x - 2)(x + 1)(x^2 - 4x - 2)$.

Áp dụng : Điều kiện $x^2 - 2 \ne 0 \Leftrightarrow x \ne \pm\sqrt{2}$

$\dfrac{x^4 + 4}{x^2 - 2} = 5x \quad \Leftrightarrow \quad x^4 + 4 = 5x(x^2 - 2)$

$\Leftrightarrow x^4 - 5x^3 + 10x + 4 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad (x - 2)(x + 1)(x^2 - 4x - 2) = 0$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x - 2 = 0 \\ x + 1 = 0 \\ x^2 - 4x - 2 = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 2 \\ x = -1 \\ x^2 - 4x + 4 = 6 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 2 \\ x = -1 \\ (x - 2)^2 = (\sqrt{6})^2 \end{array}\right.$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 2 \\ x = -1 \\ x - 2 = \sqrt{6} \\ x - 2 = -\sqrt{6} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 2 \\ x = -1 \\ x = \sqrt{6} + 2 \\ x = -\sqrt{6} + 2 \end{array}\right.$ (thỏa mãn điều kiện $x \ne \pm\sqrt{2}$)

Vậy nghiệm của phương trình đã cho là :

$x_1 = 2; \quad x_2 = -1; \quad x_3 = \sqrt{6} + 2; \quad x_4 = -\sqrt{6} + 2$.

Câu 4. Xét các phương trình : $ax^2 + bx + c = 0$ (1)

$mx^2 + nx + p = 0$ (2) $(a, m \ne 0)$

và $(an - bm)x^2 + 2(ap - mc)x + bp - nc = 0$ (3)

Do giả thiết bài toán ít nhất một trong hai phương trình (1) hoặc (2) vô nghiệm, giả sử (1) vô nghiệm như vậy $b^2 - 4ac < 0$.

Đặt $A = an - bm, \quad B = ap - mc, \quad C = bp - cn,$ ta được :

$cA - bB + aC = acn - bmc - abp + bmc + abp - anc = 0$ (*)

(3) trở thành : $Ax^2 + 2Bx + C = 0$ (4)

1. Nếu A = 0 từ (*) ta có : $aC + bB = 0 \quad \Leftrightarrow \quad C = \dfrac{b}{a}B$

(4) trở thành : $2Bx + C = 0 \quad \Leftrightarrow \quad 2Bx + \frac{b}{a}B = 0$

– $B = 0$ ta có x tùy ý $\Rightarrow$ (3) có nghiệm.

– $B \neq 0$ ta có $x = \frac{-b}{2a} \Rightarrow$ (3) có nghiệm.

2. Nếu $A \neq 0$. Ta có : $\Delta' = B^2 - AC$

– $AC \leq 0 \Rightarrow \Delta' \geq 0 \Rightarrow$ (3) có nghiệm.

– $AC > 0$ do $b^2 - 4ac < 0 \Rightarrow b^2 < 4ac \Rightarrow b^2AC < 4acAC$

Từ (*) có $bB = cA + aC \Rightarrow b^2B^2 = (cA + aC)^2 \geq 4acAC > b^2AC$

Suy ra $b^2(B^2 - AC) > 0 \Rightarrow \begin{cases} b^2 > 0 \\ B^2 - AC > 0 \end{cases}$

Vậy $\Delta' > 0 \Rightarrow$ (3) có nghiệm.

Trường hợp phương trình (2) vô nghiệm, chứng minh tương tự như trên được (3) có nghiệm.

Tóm lại với giả thiết bài toán thì phương trình (3) luôn luôn có nghiệm.

Câu 5. *(Hình 10)*

a) Ta có : $\widehat{DAE} = 90^0 \Rightarrow$ DE là đường kính của đường tròn (H; AH)

$\Rightarrow$ D, E, H thẳng hàng.

b) ΔABC vuông tại A có AM là trung tuyến (giả thiết)

$\Rightarrow AM = MB = MC = \frac{BC}{2}$.

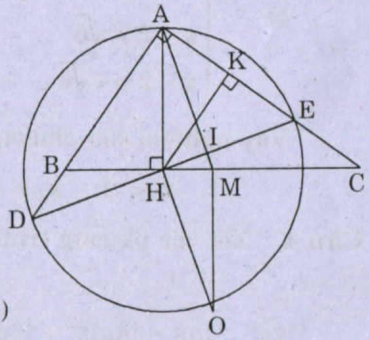
ΔMAC cân tại M $\Rightarrow \widehat{MAE} = \widehat{MCA}$ (1)

$HA = HD$ (vì $A, D \in (H; HA)$)

ΔHAD cân tại H $\Rightarrow \widehat{ADE} = \widehat{BAH}$ (2)

Mà $\widehat{MCA} = \widehat{BAH}$ (3)

(hai góc nhọn có cạnh tương ứng vuông góc)



Hình 10

Từ (1), (2) và (3) ta có : $\widehat{MAE} = \widehat{ADE}$

Gọi I là giao điểm của AM và DE.

Ta có : $\widehat{MAE} + \widehat{DAI} = \widehat{DAE}$.

Do đó $\widehat{ADE} + \widehat{DAI} = 90^0 \Rightarrow \widehat{AID} = 90^0 \Rightarrow MA \perp DE$.

c) Từ (2) và (3) ta có : $\widehat{ADE} = \widehat{MCA}$

$\Rightarrow$ B, C, D, E cùng thuộc một đường tròn tâm O.

M là trung điểm dây BC nên $OM \perp BC$.

H là trung điểm dây DE nên $OH \perp DE$.

Ta có : $AH \perp BC$ (giả thiết), $OM \perp BC \Rightarrow AH // OM$.

và $MA \perp DE$ (câu b), $OH \perp DE \Rightarrow MA // OH$.

Tứ giác AMOH có AH // OM và MA // OH nên tứ giác AMOH là hình bình hành.

d) Vẽ HK vuông góc với AC.

ΔHAC vuông tại H có $\widehat{ACH} = 30^0$ (giả thiết)

$\Rightarrow \Delta HAC$ là nửa tam giác đều $\Rightarrow \widehat{HAE} = 60^0$, $AC = 2AH = 2a$.

ΔHAE cân tại H (HA = HE) có $\widehat{HAE} = 60^0$

$\Rightarrow \Delta HAE$ đều $\Rightarrow AE = HE = a$, $HK = \frac{AH\sqrt{3}}{2} = \frac{a\sqrt{3}}{2}$.

Do đó $EC = AC - AE = 2a - a = a$.

Vậy : $S_{HEC} = \frac{1}{2}EC.HK = \frac{1}{2} \cdot a \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{4}a^2$ (đvdt).

Câu 6. *(Hình 11)*

Hình thang ABCD (AB // CD) có : AC = BD (giả thiết) nên là hình thang cân $\Rightarrow \widehat{BAD} = \widehat{ABC}$ Mà $\widehat{CAB} = \widehat{MBC}$ (giả thiết)

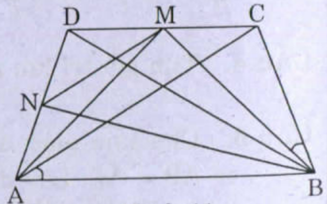
Do đó $\widehat{BAD} - \widehat{CAB} = \widehat{ABC} - \widehat{MBC} \Rightarrow \widehat{DAC} = \widehat{ABM}$ (1)

Gọi N là trung điểm cạnh AD

$\Rightarrow$ MN là đường trung bình ΔADC

$\Rightarrow MN // CA$

$\Rightarrow \widehat{DAC} = \widehat{DNM}$ (2)



Hình 11

Từ (1) và (2) có $\widehat{ABM} = \widehat{DNM}$

$\Rightarrow$ Tứ giác ANMB nội tiếp được.

Mặt khác ΔBAD cân tại B (AB = BD) có BN là trung tuyến.

$\Rightarrow$ BN là đường cao của tam giác BAD $\Rightarrow \widehat{ANB} = 90^0$.

$\Rightarrow$ AB là đường kính của đường tròn ngoại tiếp ΔMAB

$\Rightarrow \widehat{AMB} = 90^0$. Mà MA = MB (tính chất đối xứng trục).

Do đó ΔAMB vuông cân tại M $\Rightarrow \widehat{MAB} = \widehat{MBA} = 45^0$.

Ta có : ΔABC cân tại A (AB = AC).

$\Rightarrow \quad \widehat{ACB} = \widehat{ABC} = \widehat{MBA} + \widehat{MBC} = 45^0 + \widehat{MBC}$

Ta có : $\widehat{BAC} + \widehat{ACB} + \widehat{ABC} = 180^0$

$\widehat{MBC} + 45^0 + \widehat{MBC} + 45^0 + \widehat{MBC} = 180^0$

$3\widehat{MBC} = 180^0 - 90^0$ hay $\widehat{MBC} = 30^0$

Do đó $\widehat{BAD} = \widehat{ABC} = \widehat{MAB} + \widehat{MBC} = 75^0$.

Vậy $\widehat{ADC} = \widehat{BCD} = 180^0 - \widehat{ABC} = 180^0 - 75^0 = 105^0$.

ĐỀ 8

TRƯỜNG PTTH CHUYÊN LÊ HỒNG PHONG, TPHCM

Đề thi tuyển sinh vào lớp 10 chuyên Toán năm học 2002 – 2003

Câu 1. Tìm giá trị của m để phương trình sau có nghiệm và tính các nghiệm ấy theo m :

$$x + |x^2 - 2x + m| = 0.$$

Câu 2. Phân tích thành nhân tử : $A = x^{10} + x^5 + 1$.

Câu 3. Giải các phương trình và hệ phương trình :

a) $\dfrac{x^2}{3} + \dfrac{48}{x^2} = 10\left(\dfrac{x}{3} - \dfrac{4}{x}\right)$ **b)** $\sqrt{x + 2 + 3\sqrt{2x - 5}} + \sqrt{x - 2 - \sqrt{2x - 5}} = 2\sqrt{2}$

c) $\begin{cases} xy^2 - 2y + 3x^2 = 0 \\ y^2 + x^2y + 2x = 0 \end{cases}$

Câu 4. Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của : $y = \dfrac{x^2}{x^2 - 5x + 7}$.

Câu 5. Cho tam giác ABC có 3 góc nhọn nội tiếp trong đường tròn (O) và có AB < AC. Lấy điểm M thuộc cung BC không chứa điểm A của đường tròn (O). Vẽ MH vuông góc BC, MK vuông góc CA, MI vuông góc AB (H thuộc BC, K thuộc AC, I thuộc AB).

Chứng minh : $\dfrac{BC}{MH} = \dfrac{AC}{MK} + \dfrac{AB}{MI}$.

Câu 6. Cho tam giác ABC. Giả sử các đường phân giác trong và phân giác ngoài của góc $\widehat{A}$ của tam giác ABC lần lượt cắt đường thẳng BC tại D, E và có AD = AE.

Chứng minh : $AB^2 + AC^2 = 4R^2$ với R là bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC.

BÀI GIẢI

Câu 1. $x + |x^2 - 2x + m| = 0 \Leftrightarrow |x^2 - 2x + m| = -x$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -x \geq 0 \\ \left[\begin{array}{l} x^2 - 2x + m = -x \\ x^2 - 2x + m = x \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq 0 \\ \left[\begin{array}{ll} x^2 - x + m = 0 & (1) \\ x^2 - 3x + m = 0 & (2) \end{array}\right. \end{cases}$$

+ Xét m > 0 : Nếu (1), (2) có nghiệm thì các nghiệm đều dương (S > 0, P > 0) không thỏa $x \leq 0$.

+ Xét m = 0 : (1) có nghiệm 0 và 1; (2) có nghiệm 0 và 3. Nhận x = 0.

+ Xét m < 0 : phương trình đã cho có bốn nghiệm, hai nghiệm dương, hai nghiệm âm (do P < 0) thỏa điều kiện $x \leq 0$.

Hai nghiệm âm là : $x = \dfrac{1 - \sqrt{1 - 4m}}{2}$; $x = \dfrac{3 - \sqrt{9 - 4m}}{2}$.

Vậy $m \leq 0$ thì phương trình có nghiệm :

$$x = 0; \quad x = \frac{1 - \sqrt{1 - 4m}}{2}; \quad x = \frac{3 - \sqrt{9 - 4m}}{2}.$$

Câu 2.
$$\begin{aligned} A &= x^{10} + x^5 + 1 \\ &= x^{10} + x^9 + x^8 - x^9 - x^8 - x^7 + x^7 + x^6 + x^5 - x^6 - x^5 - x^4 + x^5 + \\ &\qquad + x^4 + x^3 - x^3 - x^2 - x + x^2 + x + 1 \\ &= x^8(x^2 + x + 1) - x^7(x^2 + x + 1) + x^5(x^2 + x + 1) - x^4(x^2 + x + 1) + \\ &\qquad + x^3(x^2 + x + 1) - x(x^2 + x + 1) + 1(x^2 + x + 1) \end{aligned}$$

Vậy $A = (x^2 + x + 1)(x^8 - x^7 + x^5 - x^4 + x^3 - x + 1)$.

Câu 3.

a) Điều kiện $x \neq 0$.

Đặt $y = \dfrac{x}{3} - \dfrac{4}{x}$. Ta có : $y^2 = \dfrac{x^2}{9} + \dfrac{16}{x^2} - \dfrac{8}{3}$

Do đó $3y^2 + 8 = \dfrac{x^2}{3} + \dfrac{48}{x^2}$

Ta có phương trình : $3y^2 + 8 = 10y \Leftrightarrow 3y^2 - 10y + 8 = 0$

$\Delta' = 25 - 24 = 1$

$y_1 = \dfrac{5 + 1}{3} = 2; \quad y_2 = \dfrac{5 - 1}{3} = \dfrac{4}{3}$

* Với y = 2, ta có : $\dfrac{x}{3} - \dfrac{4}{x} = 2 \Leftrightarrow x^2 - 12 = 6x \Leftrightarrow x^2 - 6x - 12 = 0$

$\Delta' = 9 + 12 = 21 \quad \Rightarrow \quad \sqrt{\Delta'} = \sqrt{21}$.

$x_1 = 3 + \sqrt{21}\,; \qquad x_2 = 3 - \sqrt{21}$.

* Với $y = \dfrac{4}{3}$, ta có : $\dfrac{x}{3} - \dfrac{4}{x} = \dfrac{4}{3} \quad \Leftrightarrow \quad x^2 - 12 = 4x \quad \Leftrightarrow \quad x^2 - 4x - 12 = 0$

$\Delta' = 4 + 12 = 16 \quad \Rightarrow \quad \sqrt{\Delta'} = 4$.

$x_3 = 2 + 4 = 6; \qquad x_4 = 2 - 4 = -2.$

Phương trình có bốn nghiệm là :

$x_1 = 3 + \sqrt{21}\,; \qquad x_2 = 3 - \sqrt{21}\,; \qquad x_3 = 6; \qquad x_4 = -2.$

b) Điều kiện $x \geq \dfrac{5}{2}$. Ta có : $\sqrt{x + 2 + 3\sqrt{2x - 5}} + \sqrt{x - 2 - \sqrt{2x - 5}} = 2\sqrt{2}$

$$\Leftrightarrow \quad \sqrt{2}\left(\sqrt{x + 2 + 3\sqrt{2x - 5}} + \sqrt{x - 2 - \sqrt{2x - 5}}\right) = 2\sqrt{2}\sqrt{2}$$

$$\Leftrightarrow \quad \sqrt{2x + 4 + 6\sqrt{2x - 5}} + \sqrt{2x - 4 - 2\sqrt{2x - 5}} = 2.2$$

$$\Leftrightarrow \quad \sqrt{2x - 5 + 6\sqrt{2x - 5} + 9} + \sqrt{2x - 5 - 2\sqrt{2x - 5} + 1} = 4$$

$$\Leftrightarrow \quad \sqrt{\left(\sqrt{2x - 5} + 3\right)^2} + \sqrt{\left(\sqrt{2x - 5} - 1\right)^2} = 4$$

$$\Leftrightarrow \quad \sqrt{2x - 5} + 3 + \left|\sqrt{2x - 5} - 1\right| = 4 \quad \Leftrightarrow \quad \left|\sqrt{2x - 5} - 1\right| = 1 - \sqrt{2x - 5}$$

$$\Leftrightarrow \quad \sqrt{2x - 5} - 1 \leq 0 \quad (\text{vì } |A| = -A \;\Leftrightarrow\; A \leq 0)$$

$$\Leftrightarrow \quad \sqrt{2x - 5} \leq 1 \quad \Leftrightarrow \quad 0 \leq 2x - 5 \leq 1^2$$

$$\Leftrightarrow \quad 5 \leq 2x \leq 6 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{5}{2} \leq x \leq 3$$

Vậy nghiệm của phương trình là : $\dfrac{5}{2} \leq x \leq 3$.

c) $\begin{cases} xy^2 - 2y + 3x^2 = 0 & (1) \\ y^2 + x^2y + 2x = 0 & (2) \end{cases}$

* Xét x = 0 thì y = 0, hệ có một nghiệm $\begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases}$

* Xét $x \neq 0$, nhân hai vế của (2) với x rồi trừ cho (1) vế theo vế ta có :

$x^3y + 2y - x^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad y(x^3 + 2) = x^2 \quad \Rightarrow \quad y = \dfrac{x^2}{x^3 + 2}$ (vì $x^3 + 2 \neq 0$).

Thay vào (1) ta có : $x\left(\dfrac{x^2}{x^3 + 2}\right)^2 - 2\left(\dfrac{x^2}{x^3 + 2}\right) + 3x^2 = 0$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{x^3}{(x^3 + 2)^2} - \frac{2}{x^3 + 2} + 3 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x^3 - 2(x^3 + 2) + 3(x^3 + 2)^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad x^3 - 2x^3 - 4 + 3x^6 + 12x^3 + 12 = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad 3x^6 + 11x^3 + 8 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad (x^3 + 1)(3x^3 + 8) = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad \left[\begin{array}{l} x^3 + 1 = 0 \\ 3x^3 + 8 = 0 \end{array}\right. \quad \Leftrightarrow \quad \left[\begin{array}{l} x^3 = -1 \\ x^3 = -\dfrac{8}{3} \end{array}\right. \quad \Leftrightarrow \quad \left[\begin{array}{l} x = -1 \\ x = \sqrt[3]{\dfrac{-8}{3}} \end{array}\right.$$

* $x = -1$, ta có : $y = \dfrac{(-1)^2}{(-1)^3 + 2} = 1$.

* $x = \sqrt[3]{\dfrac{-8}{3}} = \dfrac{-2}{\sqrt[3]{3}}$, ta có : $y = \dfrac{\left(\dfrac{-2}{\sqrt[3]{3}}\right)^2}{\left(\dfrac{-2}{\sqrt[3]{3}}\right)^3 + 2} = -\dfrac{6}{\sqrt[3]{9}}$.

Nghiệm của phương trình là : $\begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases}$; $\begin{cases} x = -1 \\ y = 1 \end{cases}$; $\begin{cases} x = \dfrac{-2}{\sqrt[3]{3}} \\ y = \dfrac{-6}{\sqrt[3]{9}} \end{cases}$

Câu 4. Ta có : $x^2 - 5x + 7 = \left(x - \dfrac{5}{2}\right)^2 + \dfrac{3}{4} > 0$. Do đó y xác định với mọi x.

$$y = \frac{x^2}{x^2 - 5x + 7} \quad \Leftrightarrow \quad yx^2 - 5xy + 7y = x^2 \quad \Leftrightarrow \quad (y - 1)x^2 - 5xy + 7y = 0$$

* Xét y = 1, ta có : $-5x + 7 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = \dfrac{7}{5}$

* Xét $y \neq 1$, ta có : $\Delta = 25y^2 - 28y(y - 1) = 25y^2 - 28y^2 + 28y$

$= -3y^2 + 28y = y(-3y + 28)$

Để có x thì $\Delta \geq 0 \;\Leftrightarrow\; \left[\begin{array}{l} y \geq 0;\; -3y + 28 \geq 0 \\ y \leq 0;\; -3y + 28 \leq 0 \end{array}\right. \;\Leftrightarrow\; \left[\begin{array}{l} y \geq 0;\; y \leq \dfrac{28}{3} \\ y \leq 0;\; y \geq \dfrac{28}{3} \end{array}\right.$

$$\Leftrightarrow \quad 0 \leq y \leq \frac{28}{3}$$

+ $y = 0$ thì $x = \dfrac{5y}{2(y - 1)} = 0$

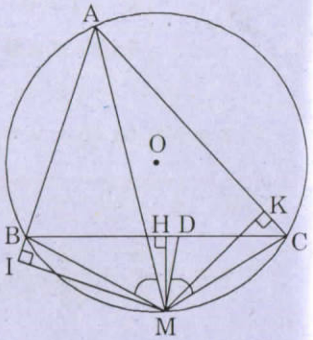
+ $y = \dfrac{28}{3}$ thì $x = \dfrac{5y}{2(y - 1)} = \dfrac{14}{5}$

Vậy : Giá trị nhỏ nhất của y là 0 với x = 0.

Giá trị lớn nhất của y là $\frac{28}{3}$ với $x = \frac{14}{5}$.

Câu 5. *(Hình 12)*

Gọi D là điểm trên cạnh BC sao cho $\widehat{DMC} = \widehat{BMA}$.



Hình 12

Xét ΔMBA và ΔMDC có :

$\widehat{BMA} = \widehat{DMC}$; $\widehat{BAM} = \widehat{DCM}$

(hai góc nội tiếp cùng chắn cung BM).

Do đó ΔMBA ∽ ΔMDC.

MI, MH lần lượt là đường cao ứng với cạnh AB, DC của tam giác MBA, MDC.

Ta có : $\frac{AB}{MI} = \frac{DC}{MH}$ (1)

Mặt khác : $\widehat{BMD} = \widehat{BMA} + \widehat{AMD}$,

$\widehat{AMC} = \widehat{DMC} + \widehat{AMD}$ và $\widehat{BMA} = \widehat{DMC} \Rightarrow \widehat{BMD} = \widehat{AMC}$.

Xét ΔMBD và ΔMAC có : $\widehat{BMD} = \widehat{AMC}$; $\widehat{MBD} = \widehat{MAC}$ (hai góc nội tiếp cùng chắn cung MC).

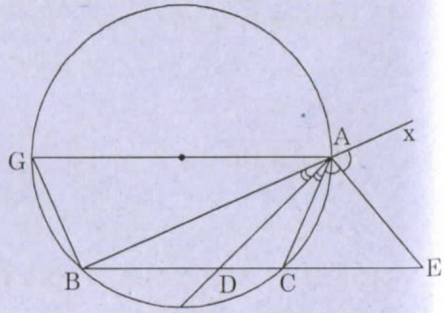
Do đó : ΔMBD ∽ ΔMAC.

MH, MK lần lượt là đường cao ứng với cạnh BD, AC của tam giác MBD, MAC. Ta có : $\frac{BD}{MH} = \frac{AC}{MK}$ (2)

Từ (1) và (2) ta có : $\frac{AC}{MK} + \frac{AB}{MI} = \frac{BD + DC}{MH} = \frac{BC}{MH}$

Vậy : $\frac{BC}{MH} = \frac{AC}{MK} + \frac{AB}{MI}$.

Câu 6. *(Hình 13)*



Hình 13

AD cắt cung BC tại F.

Vẽ đường kính AG của đường tròn (ABC).

Ta có : $\widehat{ABG} = 90^0$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn)

$$\text{sđ}\,\overset{\frown}{GB} + \text{sđ}\,\overset{\frown}{FC} + \text{sđ}\,\overset{\frown}{AC} + \text{sđ}\,\overset{\frown}{BF} = \text{sđ}\,\overset{\frown}{ACG} = 180^0 \quad (1)$$

$$\widehat{BAF} = \widehat{FAC} \text{ (AD là phân giác)} \Rightarrow \text{sđ}\,\overset{\frown}{BF} = \text{sđ}\,\overset{\frown}{FC} \quad (2)$$

AD, AE là hai tia phân giác của hai góc kề bù $\widehat{BAC}$ và $\widehat{CAx}$ nên $\widehat{DAE} = 90^0$.

ΔDAE vuông có AD = AE (giả thiết) nên là tam giác vuông cân $\Rightarrow \widehat{ADE} = 45^0$.

$$\text{sđ}\,\widehat{ADE} = \frac{\text{sđ}\,\overset{\frown}{AC} + \text{sđ}\,\overset{\frown}{BF}}{2} \Rightarrow \text{sđ}\,\overset{\frown}{AC} + \text{sđ}\,\overset{\frown}{BF} = 90^0 \quad (3)$$

Từ (1), (2) và (3), ta có : $\overset{\frown}{GB} = \overset{\frown}{AC} \Rightarrow GB = AC$.

ΔBAG vuông tại B nên : $AB^2 + BG^2 = AG^2 \Rightarrow AB^2 + AC^2 = (2R)^2$

$\Rightarrow AB^2 + AC^2 = 4R^2$ (đpcm).

ĐỀ 9

TRƯỜNG PTTH CHUYÊN LÊ HỒNG PHONG, TPHCM

Đề thi tuyển sinh lớp 10 (Ban A, B) năm học 2001 – 2002

Câu 1. Cho phương trình : $(m + 1)x^2 - 2(m + 2)x + m - 3 = 0$ (có x là ẩn số).

a) Định m để phương trình có nghiệm.

b) Định m để phương trình có hai nghiệm x_1, x_2 thỏa : $(4x_1 + 1)(4x_2 + 1) = 18$.

Câu 2. Chứng minh các bất đẳng thức sau :

a) $a^2 + b^2 + c^2 \geq ab + bc + ca$ với mọi a, b, c.

b) $\frac{a^8 + b^8 + c^8}{a^3b^3c^3} \geq \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}$ $(a > 0, b > 0, c > 0)$

c) $a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + e^2 \geq a(b + c + d + e)$ với mọi a, b, c, d, e.

Câu 3. Giải các phương trình :

a) $x^2 + \frac{2x}{x - 1} = 8$ **b)** $\frac{4x}{x^2 - 8x + 7} + \frac{5x}{x^2 - 10x + 7} = -1$

Câu 4. Cho tam giác ABC có ba góc nhọn nội tiếp trong đường tròn tâm O và trực tâm là H. Lấy điểm M thuộc cung nhỏ BC.

a) Xác định vị trí của điểm M sao cho tứ giác BHCM là một hình bình hành.

b) Với M lấy bất kì thuộc cung nhỏ BC, gọi N, E lần lượt là các điểm đối xứng của M qua AB và AC. Chứng minh ba điểm N, H, E thẳng hàng.

c) Xác định vị trí của M thuộc cung nhỏ BC để cho NE có độ dài lớn nhất.

Câu 5. Cho đường tròn cố định tâm O, bán kính bằng 1. Tam giác ABC thay đổi và luôn ngoại tiếp đường tròn (O). Một đường thẳng đi qua tâm O cắt các đoạn AB, AC lần lượt tại M, N. Xác định giá trị nhỏ nhất của diện tích tam giác AMN.

BÀI GIẢI

Câu 1.

a) $(m + 1)x^2 - 2(m + 2)x + m - 3 = 0$

* Với $m + 1 = 0 \Leftrightarrow m = -1$

Phương trình trở thành : $-2x - 4 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = -2$

Vậy khi $m = -1$, phương trình có nghiệm $x = -2$.

* Với $m + 1 \neq 0 \Leftrightarrow m \neq -1$

$\Delta' = (m + 2)^2 - (m + 1)(m - 3) = m^2 + 4m + 4 - m^2 + 3m - m + 3 = 6m + 7$

Phương trình có nghiệm $\Leftrightarrow \quad \Delta' \geq 0$.

$$\Leftrightarrow \quad 6m + 7 \geq 0 \quad \Leftrightarrow \quad 6m \geq -7 \quad \Leftrightarrow \quad m \geq -\frac{7}{6}$$

Phương trình có nghiệm $\Leftrightarrow \quad m \neq -1;\ m \geq -\frac{7}{6}$

Vậy phương trình có nghiệm $\Leftrightarrow m \geq -\frac{7}{6}$.

b) Điều kiện : $m \geq -\frac{7}{6}; \quad m \neq -1$.

Theo định lí Viet ta có : $\begin{cases} S = x_1 + x_2 = \dfrac{2(m + 2)}{m + 1} \\ P = x_1x_2 = \dfrac{m - 3}{m + 1} \end{cases}$

Do đó : $(4x_1 + 1)(4x_2 + 1) = 18 \quad \Leftrightarrow \quad 16x_1x_2 + 4x_1 + 4x_2 + 1 = 18$

$$\Leftrightarrow \quad 16x_1x_2 + 4(x_1 + x_2) - 17 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{16(m - 3)}{m + 1} + \frac{8(m + 2)}{m + 1} - 17 = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad 16(m - 3) + 8(m + 2) - 17(m + 1) = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad 16m - 48 + 8m + 16 - 17m - 17 = 0$$

$\Leftrightarrow \quad 7m - 49 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad m = 7$ (thỏa điều kiện $m \neq -1;\ m \geq -\frac{7}{6}$)

Vậy $m = 7$ thì phương trình có hai nghiệm $x_1;\ x_2$ thỏa mãn :

$$(4x_1 + 1)(4x_2 + 1) = 18.$$

Câu 2.

a) $a^2 + b^2 + c^2 \geq ab + bc + ca \quad \Leftrightarrow \quad a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca \geq 0$

$\Leftrightarrow \quad 2a^2 + 2b^2 + 2c^2 - 2ab - 2bc - 2ca \geq 0$

$\Leftrightarrow \quad (a^2 + b^2 - 2ab) + (b^2 + c^2 - 2bc) + c^2 + a^2 - 2ca) \geq 0$

$\Leftrightarrow \quad (a - b)^2 + (b - c)^2 + (c - a)^2 \geq 0$ (đúng)

Do đó $a^2 + b^2 + c^2 \geq ab + bc + ca$ là bất đẳng thức đúng.

b) Áp dụng câu a) ta có :

$$a^8 + b^8 + c^8 \geq a^4b^4 + b^4c^4 + c^4a^4 = (a^2b^2)^2 + (b^2c^2)^2 + (c^2a^2)^2 \geq$$

$$\geq (a^2b^2)(b^2c^2) + (b^2c^2)(c^2a^2) + (a^2b^2)(c^2a^2) = a^2b^2c^2(a^2 + b^2 + c^2)$$

$$\geq a^2b^2c^2\,(ab + bc + ca)$$

Do đó

$$\frac{a^8 + b^8 + c^8}{a^3b^3c^3} \geq \frac{a^2b^2c^2(ab + bc + ca)}{a^3b^3c^3} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{a^8 + b^8 + c^8}{a^3b^3c^3} \geq \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}.$$

c) $a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + e^2 \geq a(b + c + d + e)$

$\Leftrightarrow \quad a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + e^2 - a(b + c + d + e) \geq 0$

$\Leftrightarrow \quad a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + e^2 - ab - ac - ad - ae) \geq 0$

$$\Leftrightarrow \quad \left(\frac{a^2}{4} + b^2 - ab\right) + \left(\frac{a^2}{4} + c^2 - ac\right) + \left(\frac{a^2}{4} + d^2 - ad\right) + \left(\frac{a^2}{4} + e^2 - ae\right) \geq 0$$

$\Leftrightarrow \quad \left(\frac{a}{2} - b\right)^2 + \left(\frac{a}{2} - c\right)^2 + \left(\frac{a}{2} - d\right)^2 + \left(\frac{a}{2} - e\right)^2 \geq 0$ (bất đẳng thức đúng)

Do đó $a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + e^2 \geq a(b + c + d + e)$ là bất đẳng thức đúng.

Câu 3.

a) Điều kiện $x - 1 \neq 0 \quad \Leftrightarrow \quad x \neq 1$.

Ta có : $x^2 + \dfrac{2x}{x - 1} = 8 \quad \Leftrightarrow \quad x^3 - x^2 + 2x = 8x - 8$

$$\Leftrightarrow \quad x^3 - x^2 - 6x + 8 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x^3 - 2x^2 + x^2 - 2x - 4x + 8 = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad x^2(x - 2) + x(x - 2) - 4(x - 2) = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad (x - 2)(x^2 + x - 4) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad (x - 2)\left[\left(x^2 + x + \frac{1}{4}\right) - \frac{17}{4}\right] = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad (x - 2)\left[\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{17}{4}\right] = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \left[\begin{array}{l} x - 2 = 0 \\ \left(x + \dfrac{1}{2}\right)^2 - \dfrac{17}{4} = 0 \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 2 \\ x + \dfrac{1}{2} = \pm\dfrac{\sqrt{17}}{2} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 2 \\ x = \dfrac{\pm\sqrt{17} - 1}{2} \end{array}\right. \text{(thỏa điều kiện } x \neq 1\text{)}$$

Vậy phương trình có ba nghiệm là : $2;\ \dfrac{\sqrt{17}-1}{2};\ \dfrac{-\sqrt{17}-1}{2}$.

b)* Xét x = 0.

x = 0 không là nghiệm của phương trình vì $0 \neq -1$.

* Xét $x \neq 0$. Chia vế trái của phương trình cho x, phương trình trở thành :

$$\frac{4}{x - 8 + \dfrac{7}{x}} + \frac{5}{x - 10 + \dfrac{7}{x}} = -1$$

Đặt $t = x - 10 + \dfrac{7}{x}$. Phương trình trở thành :

$$\frac{4}{t+2} + \frac{5}{t} = -1 \quad \Leftrightarrow \quad 4t + 5t + 10 = -t^2 - 2t$$

$\Leftrightarrow \quad t^2 + 11t + 10 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad t = -1$ hoặc $t = -10$ (vì $a - b + c = 0$)

Với $t = -1$. Ta có : $x - 10 + \dfrac{7}{x} = -1 \quad \Leftrightarrow \quad x - 9 + \dfrac{7}{x} = 0$

$$\Leftrightarrow \quad x_1 = \frac{9 + \sqrt{53}}{2}; \quad x_2 = \frac{9 - \sqrt{53}}{2}$$

Với $t = -10$. Ta có : $x - 10 + \dfrac{7}{x} = -10 \quad \Leftrightarrow \quad x + \dfrac{7}{x} = 0$

$$\Leftrightarrow \quad x^2 + 7 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x \in \varnothing$$

Vậy phương trình có hai nghiệm là : $\dfrac{9+\sqrt{53}}{2};\ \dfrac{9-\sqrt{53}}{2}$.

Câu 4. *(Hình 14)*

a) Ta có : $AH \perp BC$, $CH \perp AB$.

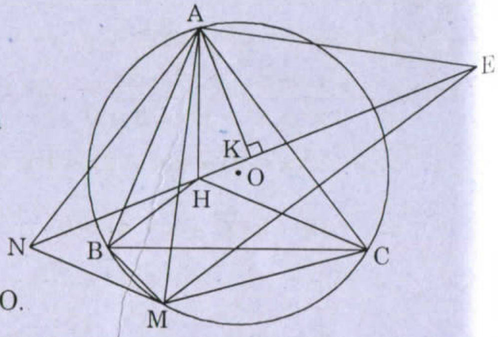
Tứ giác BHCM là hình bình hành

$\Leftrightarrow$ BH // MC và CH // MB

$\Leftrightarrow AC \perp MC$ và $AB \perp MB$

$\Leftrightarrow$ AM là đường kính của (O)

$\Leftrightarrow$ M là điểm đối xứng của A qua O.



Hình 14

b) $\widehat{AMB} = \widehat{ANB}$ (tính chất đối xứng trục)

$\widehat{AMB} = \widehat{ACB}$ (hai góc nội tiếp cùng chắn một cung AB)

Suy ra $\widehat{ANB} = \widehat{ACB}$. Mà $\widehat{AHB} + \widehat{ANB} = 180^0$

$\Rightarrow$ tứ giác NAHB nội tiếp $\Rightarrow \widehat{NHB} = \widehat{NAB}$.

Mà $\widehat{NAB} = \widehat{BAM}$ (tính chất đối xứng trục). Suy ra $\widehat{NHB} = \widehat{BAM}$

Chứng minh tương tự ta có : $\widehat{CHE} = \widehat{MAC}$

$$\widehat{BAC} + \widehat{BHC} = 180^0$$

Do đó $\widehat{NHE} = \widehat{NHB} + \widehat{CHE} + \widehat{BHC} = \widehat{BAM} + \widehat{MAC} + \widehat{BHC}$

$= \widehat{BAC} + \widehat{BHC} = 180^0 \quad \Rightarrow \quad$ N, H, E thẳng hàng.

c) $\widehat{NAE} = 2\widehat{BAC}$.

Vẽ $AK \perp NE$, $K \in NE$.

Ta có : AM = AN, AM = AE (tính chất đối xứng trục).

$\Rightarrow$ AN = AE $\Rightarrow \Delta ANE$ cân tại A, mà AK là đường cao

$\Rightarrow$ AK vừa là phân giác, vừa là trung tuyến

$\Rightarrow \widehat{ANE} = 2\widehat{NAK}$, NE = 2NK do đó $\widehat{BAC} = \widehat{NAK}$

ΔKAN có $\widehat{K} = 90^0$ nên $NK = AN.\sin\widehat{NAK}$

Do đó $NE = 2AM.\sin\widehat{BAC}$

Vì $AM \leq 2R$; $\sin\widehat{BAC}$ không đổi.

NE lớn nhất $\Leftrightarrow$ AM lớn nhất $\Leftrightarrow$ AM là đường kính của (O) $\Leftrightarrow$ M là điểm đối xứng của A qua O.

Vậy khi M là điểm đối xứng của A qua O thì NE lớn nhất.

Câu 5. *(Hình 15)*

Ta có (O) tiếp xúc AB, AC lần lượt tại H, K.

$$S_{AMN} = S_{OAM} + S_{OAN} = \frac{1}{2}OH.AM + \frac{1}{2}OK.AN = \frac{AM + AN}{2}$$

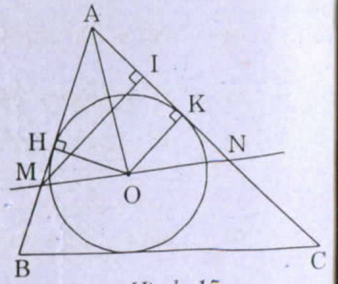
Vẽ $MI \perp AC$, $I \in AC$. Ta có : $AM \geq MI$

Áp dụng bất đẳng thức Côsi cho hai số không âm, ta có :

$$\frac{AM + AN}{2} \geq \sqrt{AM.AN}$$

Do đó $S_{AMN} \geq \sqrt{AM.AN} \geq \sqrt{MI.AN}$

$$S_{AMN} = \frac{1}{2}MI.AN \quad \Rightarrow \quad MI.AN = 2S_{AMN}$$



Hình 15

Ta có : $S_{AMN} \ge \sqrt{2S_{AMN}} \quad \Leftrightarrow \quad S^2_{AMN} \ge 2S_{AMN} \quad \Leftrightarrow \quad S_{AMN} \ge 2$

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow$ $I \equiv A$ $\Leftrightarrow$ $MN \perp OA$, $\widehat{BAC} = 90^0$.

Vậy giá trị nhỏ nhất của diện tích tam giác AMN là 2.

ĐỀ 10

TRƯỜNG PTTH CHUYÊN LÊ HỒNG PHONG, TPHCM

Đề thi tuyển sinh vào lớp 10 chuyên Toán năm học 2001 – 2002

Câu 1. Tìm tất cả các số nguyên x thỏa : $x^3 + 8 = 7\sqrt{8x+1}$.

Câu 2. Cho n là số nguyên dương. Chứng minh ta luôn có bất đẳng thức :

$$\frac{1}{3} + \frac{2}{3^2} + \frac{3}{3^3} + \ldots + \frac{n}{3^n} < \frac{3}{4}.$$

Câu 3. Tìm tất cả các số thực x thỏa :

$$\sqrt[4]{(x-2)(4-x)} + \sqrt[4]{x-2} + \sqrt[4]{4-x} + 6x\sqrt{3x} \le x^3 + 30.$$

Câu 4. Cho các số thực dương a, b, c thỏa $a^2 + b^2 + c^2 = 27$.

Tìm giá trị nhỏ nhất của $S = a^3 + b^3 + c^3$.

Câu 5. Cho tam giác ABC có ba góc nhọn. D là một điểm trên đoạn BC.

Đặt BC = a, CA = b, AB = c, AD = d, DB = m, DC = n.

1. Chứng minh : $d^2a = b^2m + c^2n - amn$.
2. Cho biết AD là phân giác trong góc A. Chứng minh : $AD^2 < AB.AC$.

BÀI GIẢI

Câu 1. Điều kiện : $8x + 1 \ge 0 \quad \Leftrightarrow \quad 8x \ge -1 \quad \Leftrightarrow \quad x \ge -\frac{1}{8}$.

* *Cách 1 :* Do $x \in Z$ nên $x \ge 0$. Ta có : $x^3 + 8 = 7\sqrt{8x+1}$

$$\Leftrightarrow \quad (x^3+8)^2 = \left(7\sqrt{8x+1}\right)^2 \quad \Leftrightarrow \quad x^6 + 16x^3 + 64 = 49(8x+1)$$

$$\Leftrightarrow \quad x^6 + 16x^3 - 392x + 15 = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad x^6 - 3x^5 + 3x^5 - 9x^4 + 9x^4 - 27x^3 + 43x^3 - 129x^2 + 129x^2 - 387x + 5x + 15 = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad x^5(x-3) + 3x^4(x-3) + 9x^3(x-3) + 43x^2(x-3) + 129x(x-3) - 5(x-3) = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad (x-3)(x^5 + 3x^4 + 9x^3 + 43x^2 + 129x - 5) = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad \left[\begin{array}{l} x - 3 = 0 \\ x^5 + 3x^4 + 9x^3 + 43x^2 + 129x - 5 = 0 \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \quad \left[\begin{array}{l} x = 3 \\ x^5 + 3x^4 + 9x^3 + 43x^2 + 129x - 5 = 0 \quad (*) \end{array}\right.$$

Ta thấy x = 0 không là nghiệm của (*) vì : $-5 \ne 0$.

$x \ne 0$ ta có $x \ge 0$ và $x \in Z$ nên $x \ge 1$.

Do đó : $x^5 + 3x^4 + 9x^3 + 43x^2 + 129x > 5 \Rightarrow$ (*) vô nghiệm nguyên khác 0.

Vậy phương trình chỉ có một nghiệm nguyên là x = 3.

* *Cách 2 :* $x \ge 0$; $x \in Z$.

Với x = 0; 1; 2; 4 đẳng thức không thỏa.

Với x = 3 thì đẳng thức thỏa.

Với $x \ge 5$. Ta có : $7\sqrt{8x+1} < 7\sqrt{8x+x} = 21\sqrt{x} < 21x < x^2.x = x^3 < x^3 + 8$

Vậy phương trình đã cho chỉ có một nghiệm nguyên là x = 3.

Câu 2. Với m nguyên dương, ta có : $\frac{m+0,5}{2.3^{m-1}} - \frac{m+1,5}{2.3^m} = \frac{m}{3^m}$.

Thay m lần lượt bởi 1; 2; ...; m. Ta có :

$$\frac{1}{3} = \frac{1,5}{2} - \frac{2,5}{2.3}$$

$$\frac{2}{3^2} = \frac{2,5}{2.3} - \frac{3,5}{2.3^2}$$

$$. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad .$$

$$\frac{n}{3^n} = \frac{n+0,5}{2.3^{n-1}} - \frac{n+1,5}{2.3^n}$$

Do đó : $\frac{1}{3} + \frac{2}{3^2} + \frac{3}{3^3} + \ldots + \frac{n}{3^n} = \frac{1,5}{2} - \frac{n+1,5}{2.3^n} < \frac{1,5}{2} = \frac{3}{4}$.

Câu 3. Điều kiện : $\begin{cases} (x-2)(4-x) \ge 0 \\ x - 2 \ge 0 \\ 4 - x \ge 0 \\ x \ge 0 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad 2 \le x \le 4.$

Áp dụng bất đẳng thức Côsi cho hai số không âm, ta có :

$$\sqrt[4]{(x-2)(4-x)} = \sqrt{\sqrt{(x-2)(4-x)}} \le \sqrt{\frac{x-2+4-x}{2}} = 1$$

$$\sqrt[4]{x-2} = \sqrt{\sqrt{x-2}\cdot 1} \le \frac{\sqrt{x-2}+1}{2} \le \frac{\frac{x-2+1}{2}+1}{2} = \frac{x+1}{4}$$

$$\sqrt[4]{4-x} = \sqrt{\sqrt{4-x}\cdot 1} \le \frac{\sqrt{4-x}+1}{2} \le \frac{\frac{4-x+1}{2}+1}{2} = \frac{-x+7}{4}$$

$$6x\sqrt{3x} = 2\sqrt{x^3.27} \le x^3 + 27$$

Do đó : $\sqrt[4]{(x-2)(4-x)} + \sqrt[4]{(x-2)} + \sqrt[4]{4-x} + 6x\sqrt{3x} \le x^3 + 30$

Vậy $2 \le x \le 4$ là giá trị cần tìm.

Câu 4.

* *Cách 1 :*

Ta có : $(2a+3)(a-3)^2 \ge 0 \Leftrightarrow (2a+3)(a^2-6a+9) \ge 0$

$\Leftrightarrow 2a^3 - 12a^2 + 18a + 3a^2 - 18a + 27 \ge 0$

$\Leftrightarrow 2a^3 - 9a^2 + 27 \ge 0$

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow a = 3$

Tương tự, ta có : $2b^3 - 9b^2 + 27 \ge 0$, $2c^3 - 9c^2 + 27 \ge 0$.

Mà $a^2 + b^2 + c^2 = 27$ (giả thiết)

Do đó $2(a^3 + b^3 + c^3) - 9(a^2 + b^2 + c^2) + 27.3 \ge 0$

$\Leftrightarrow 2(a^3 + b^3 + c^3) \ge 6.27 \Leftrightarrow a^3 + b^3 + c^3 \ge 81$

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow a = b = c = 3$.

Vậy giá trị nhỏ nhất của $S = a^3 + b^3 + c^3$ là 81.

* *Cách 2 :* Áp dụng bất đẳng thức Côsi cho hai số không âm, ta có :

$$a^3 + 9a \ge 2\sqrt{a^3.9a} = 6a^2$$

$$a^2 + 9 \ge 2\sqrt{a^2.9} = 6a \Leftrightarrow \frac{3}{2}(a^2 + 9) \ge 9a$$

Do đó : $a^3 + \frac{3}{2}(a^2 + 9) \ge 6a^2 \Leftrightarrow 2a^3 - 9a^2 + 27 \ge 0$

Tương tự như cách 1, giải tiếp.

* *Cách 3 :* Bài toán phụ : Chứng minh rằng

$$|a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3| \le \sqrt{\left(a_1^2 + a_2^2 + a_3^2\right)\left(b_1^2 + b_2^2 + b_3^2\right)}$$

(Bất đẳng thức B.C.S)

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow \frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = \frac{a_3}{b_3}$

Do đó : $|a.1 + b.1 + c.1| \le \sqrt{(a^2 + b^2 + c^2)(1^2 + 1^2 + 1^2)}$

$\Rightarrow a + b + c \le 9$

và $a^2 + b^2 + c^2 = \left|\sqrt{a^3}\sqrt{a} + \sqrt{b^3}\sqrt{b} + \sqrt{c^3}\sqrt{c}\right| \le$

$\le \sqrt{(a^3 + b^3 + c^3)(a + b + c)} \le \sqrt{9(a^3 + b^3 + c^3)}$

Do đó $a^3 + b^3 + c^3 \ge 81$

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow a = b = c = 3$.

Vậy giá trị nhỏ nhất của $a^3 + b^3 + c^3$ là 81.

Câu 5. *(Hình 16, 17)*

1. Vẽ $AH \perp BC$, $H \in BC$

* Xét D nằm trên đường thẳng HC.

ΔHAB có $\widehat{H} = 90^0$, theo định lí Pitago ta có :

$AH^2 + BH^2 = AB^2 \Rightarrow AH^2 = c^2 - BH^2$

ΔHAD có $\widehat{H} = 90^0$, theo định lí Pitago ta có :

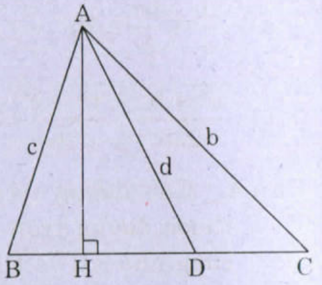
$AH^2 + DH^2 = AD^2 \Rightarrow AH^2 = d^2 - DH^2$

Do đó $d^2 - DH^2 = c^2 - BH^2$

$\Rightarrow d^2 = c^2 + DH^2 - BH^2$

$\Rightarrow d^2 = c^2 + BD(DH - BH)$

$\Rightarrow d^2n = c^2n + mn(DH - BH)$



Hình 16

Chứng minh tương tự ta có :

$d^2m = b^2m + mn(-DH - CH)$

Ta có : $d^2m + d^2n = b^2m + c^2n + mn(-DH - CH + DH - BH)$

$d^2(m + n) = b^2m + c^2n + mn(-CH - BH)$

$d^2a = b^2m + c^2n - amn$

* Xét D nằm trên đường thẳng HB.

Chứng minh tương tự trên ta cũng có : $d^2a = b^2m + c^2n - amn$.

2. $\widehat{ADC} > \widehat{ABC}$ ($\widehat{ADC}$ là góc ngoài của ΔABD)

Do đó vẽ E trên cạnh AC sao cho $\widehat{ADE} = \widehat{ABC}$

Ta có : $AE < AC$

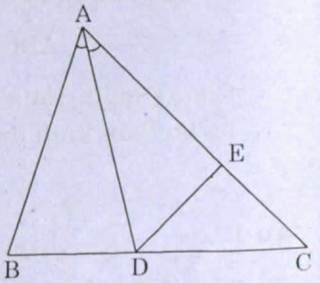
Xét ΔABD và ΔADE có :

$\widehat{BAD} = \widehat{DAE}$ (AD là phân giác), $\widehat{ABD} = \widehat{ADE}$

Do đó $\Delta ABD \backsim \Delta ADE \Rightarrow \frac{AD}{AE} = \frac{AB}{AD}$

$\Rightarrow AD^2 = AB.AE$

Do đó $AD^2 < AB.AC$.



Hình 17

ĐỀ 11

TRƯỜNG PTTH CHUYÊN LÊ HỒNG PHONG, TPHCM

Đề thi tuyển sinh vào lớp 10 (Ban A, B) năm học 2000 – 2001

Câu 1. Cho phương trình : $x^2 - 2(m + 1)x + m^2 - 4m + 5 = 0$ (có ẩn số là x).

a) Định m để phương trình có nghiệm.

b) Định m để phương trình có hai nghiệm phân biệt đều dương.

Câu 2. Giải các phương trình và hệ phương trình :

a) $x^3 + 3x^2 + 3x + 1 = 0$ **b)** $\begin{cases} x - y = 3 \\ x^3 - y^3 = 9 \end{cases}$

Câu 3. Với a > 0, b > 0, c > 0, hãy chứng minh các bất đẳng thức sau :

a) $\dfrac{ab}{c} + \dfrac{bc}{a} \geq 2b$ **b)** $\dfrac{ab}{c} + \dfrac{bc}{a} + \dfrac{ca}{b} \geq a + b + c$

c) $\dfrac{a^3 + b^3}{2ab} + \dfrac{b^3 + c^3}{2bc} + \dfrac{c^3 + a^3}{2ca} \geq a + b + c$.

Câu 4. Cho đường tròn (O; R) có đường kính AB và một điểm C bất kì thuộc đường tròn khác A và B. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của cung nhỏ AC và CB.

a) Kẻ ND vuông góc với AC (D thuộc AC). Chứng minh ND là tiếp tuyến của đường tròn (O).

b) Gọi E là trung điểm của đoạn BC. Đường thẳng OE cắt đường tròn (O) tại điểm K (khác điểm N). Chứng minh tứ giác ADEK là một hình bình hành.

c) Chứng minh rằng khi C di chuyển trên đường tròn (O) thì MN luôn luôn tiếp xúc với một đường tròn cố định.

Câu 5. Cho hai tam giác ABC và DEF có các góc đều nhọn và có

$$\widehat{ABC} = \widehat{DEF},\ \widehat{BAC} = \widehat{EDF},\ AB = 3DE.$$

Chứng minh rằng bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC bằng ba lần bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác DEF.

BÀI GIẢI

Câu 1.

a) $x^2 - 2(m + 1)x + m^2 - 4m + 5 = 0$

$\Delta' = (m + 1)^2 - (m^2 - 4m + 5) = m^2 + 2m + 1 - m^2 + 4m - 5 = 6m - 4$

Phương trình có nghiệm $\Leftrightarrow \Delta' \geq 0 \Leftrightarrow 6m - 4 \geq 0$

$\Leftrightarrow 6m \geq 4 \Leftrightarrow m \geq \dfrac{2}{3}$.

b) Phương trình có 2 nghiệm phân biệt đều dương

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a \neq 0 \\ \Delta' > 0 \\ S > 0 \\ P > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 \neq 0 \\ 6m - 4 > 0 \\ 2(m + 1) > 0 \\ m^2 - 4m + 5 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 6m > 4 \\ m + 1 > 0 \\ (m - 2)^2 + 1 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow m > \frac{2}{3}.$$

Câu 2.

a) $x^3 + 3x^2 + 3x + 1 = 0 \Leftrightarrow (x + 1)^3 = 0 \Leftrightarrow x = -1$

Vậy phương trình có nghiệm là –1.

b) $\begin{cases} x - y = 3 \\ x^3 - y^3 = 9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 + y \\ (3 + y)^3 - y^3 = 9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 + y \\ 27 + 27y + 9y^2 + y^3 - y^3 = 9 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 + y \\ y^2 + 3y + 2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 + y \\ y = -1 \text{ hoặc } y = -2 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 2;\ y = -1 \\ x = 1;\ y = -2 \end{array}\right.$

Vậy hệ phương trình có hai nghiệm là : (x = 2; y = –1) và (x = 1; y = –2).

Câu 3.

a) Áp dụng bất đẳng thức Côsi cho hai số dương ta có :

$$\frac{ab}{c} + \frac{bc}{a} \geq 2\sqrt{\frac{ab}{c} \cdot \frac{bc}{a}} \Leftrightarrow \frac{ab}{c} + \frac{bc}{a} \geq 2b.$$

b) $\dfrac{ab}{c} + \dfrac{bc}{a} \geq 2b$ (theo câu a)

Chứng minh tương tự câu a) ta có : $\dfrac{ab}{c} + \dfrac{ca}{b} \geq 2a$; $\dfrac{bc}{a} + \dfrac{ca}{b} \geq 2c$.

Do đó : $\dfrac{ab}{c} + \dfrac{bc}{a} + \dfrac{ab}{c} + \dfrac{ca}{b} + \dfrac{bc}{a} + \dfrac{ca}{b} \geq 2b + 2a + 2c$

$\Leftrightarrow \dfrac{ab}{c} + \dfrac{bc}{a} + \dfrac{ca}{b} \geq a + b + c$.

c) Với a, b > 0. Ta có :

$(a + b)(a - b)^2 \geq 0 \Leftrightarrow (a + b)[(a^2 - ab + b^2) - ab] \geq 0$

$\Leftrightarrow a^3 + b^3 - ab(a + b) \geq 0 \Leftrightarrow a^3 + b^3 \geq ab(a + b)$

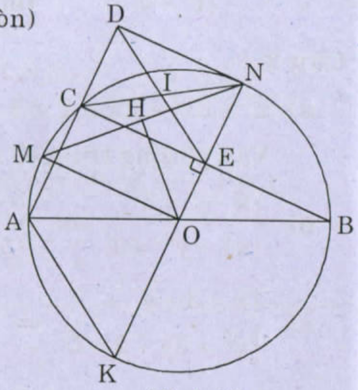
$\Leftrightarrow \dfrac{a^3 + b^3}{2ab} \geq \dfrac{a + b}{2}$

Tương tự ta có : $\frac{b^3+c^3}{2bc} \ge \frac{b+c}{2}$; $\quad \frac{c^3+a^3}{2ca} \ge \frac{c+a}{2}$.

Do đó : $\frac{a^3+b^3}{2ab} + \frac{b^3+c^3}{2bc} + \frac{c^3+a^3}{2ca} \ge \frac{a+b}{2} + \frac{b+c}{2} + \frac{c+a}{2}$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{a^3+b^3}{2ab} + \frac{b^3+c^3}{2bc} + \frac{c^3+a^3}{2ca} \ge a+b+c.$$

Câu 4. *(Hình 18)*



Hình 18

a) $\widehat{ACB} = 90^0$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn)

N là trung điểm cung BC $\Rightarrow ON \perp BC$.

Mà $AC \perp BC$.

Suy ra $AC \,//\, ON$.

$DN \perp AC$ (giả thiết)

Do đó $DN \perp ON$.

$\Rightarrow$ ND là tiếp tuyến của đường tròn (O).

b) N là trung điểm cung BC,

E là trung điểm dây BC (giả thiết)

$\Rightarrow$ O, N, E thẳng hàng.

Tứ giác CDNE có $\widehat{CDN} = \widehat{DNE} = \widehat{DCE} = 90^0$ nên là hình chữ nhật.

Gọi I là giao điểm của DE và CN.

Ta có : $IE = IN \Rightarrow \Delta IEN$ cân tại I $\Rightarrow \widehat{IEN} = \widehat{INE}$.

Hình thang ACNK ($AC \,//\, ON$) nội tiếp đường tròn (O) nên là hình thang cân $\Rightarrow \widehat{INE} = \widehat{AKN}$.

Ta có : $\widehat{AKN} = \widehat{IEN} \left(= \widehat{INE}\right) \Rightarrow AK = DE$.

$AK \,//\, DE$, $AC \,//\, ON$ $\Rightarrow$ tứ giác ADEK là hình bình hành.

c) $sđ\overset{\frown}{MN} = sđ\overset{\frown}{MC} + sđ\overset{\frown}{CN} = \frac{1}{2}sđ\overset{\frown}{AC} + \frac{1}{2}sđ\overset{\frown}{BC} = 90^0$

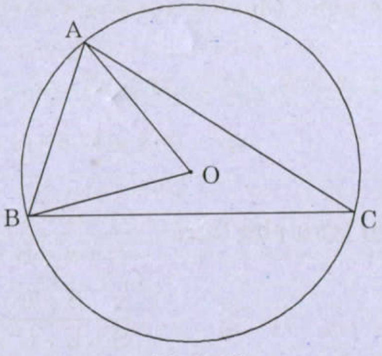
$\Rightarrow$ MN là cạnh của hình vuông nội tiếp (O; R)

$\Rightarrow OH = \frac{R\sqrt{2}}{2}$ (H là hình chiếu của O trên MN)

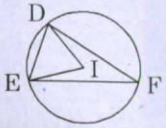
Do đó MN luôn luôn tiếp xúc với đường tròn cố định tâm O, bán kính $\frac{R\sqrt{2}}{2}$.

Câu 5. *(Hình 19, 20)*

Gọi (O; R), (I; r) lần lượt là các đường tròn ngoại tiếp các tam giác ABC, DEF.



Hình 19



Hình 20

$\Delta ABC \backsim \Delta DEF$

$\Rightarrow \widehat{ACB} = \widehat{DFE}$

$\widehat{ACB}$, $\widehat{DFE}$ nhọn nên :

$\widehat{ACB} = \frac{1}{2}\widehat{AOB}$,

$\widehat{DFE} = \frac{1}{2}\widehat{DIE}$.

Suy ra $\widehat{AOB} = \widehat{DIE}$

$OA = OB\ (= R) \Rightarrow \Delta OAB$ cân tại O.

$ID = IE\ (= r) \Rightarrow \Delta IDE$ cân tại I.

Do đó $\Delta OAB \backsim \Delta IDE \Rightarrow \frac{OA}{ID} = \frac{AB}{DE} \Rightarrow \frac{R}{r} = \frac{3DE}{DE} \Rightarrow R = 3r.$

ĐỀ 12

TRƯỜNG PTTH CHUYÊN LÊ HỒNG PHONG, TPHCM

Đề thi tuyển sinh vào lớp 10 chuyên Toán năm học 2000 – 2001

Câu 1. Chứng minh :

$$\frac{A+a+B+b}{A+a+B+b+c+d} + \frac{B+b+C+c}{B+b+C+c+a+d} > \frac{C+c+A+a}{C+c+A+a+b+d}$$

trong đó A, a, B, b, C, c, d là các số dương.

Câu 2. Cho $x, y > 0$ và $x + y \le 1$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức :

$$A = \frac{1}{x^2+y^2} + \frac{2}{xy} + 4xy.$$

Câu 3. Một số nguyên dương N có đúng 12 ước số (dương) khác nhau kể cả chính nó và 1, nhưng chỉ có 3 ước số nguyên tố khác nhau. Giả sử tổng của các ước số nguyên tố là 20, tính giá trị nhỏ nhất có thể có của N.

Câu 4. Tìm tất cả các số nguyên x, y, z thỏa phương trình :

$$3x^2 + 6y^2 + 2z^2 + 3y^2z^2 - 18x - 6 = 0.$$

Câu 5. Diện tích tam giác ABC là 1. Gọi A_1, B_1, C_1 lần lượt là trung điểm BC, CA, AB. Trên các đoạn AB_1, CA_1, BC_1 lần lượt chọn các điểm K, L, M. Tìm giá trị nhỏ nhất của diện tích phần chung của hai ΔKLM và $\Delta A_1B_1C_1$.

BÀI GIẢI

Câu 1. Bài toán phụ : Cho $0 < x < y,\ z > 0$. Chứng minh rằng : $\frac{x+z}{y+z} > \frac{x}{y}$.

Vì $0 < x < y,\ z > 0 \quad \Rightarrow \quad zy > zx \quad \Rightarrow \quad xy + zy > xz + xy$

$$\Rightarrow \quad y(x+z) > x(y+z) \quad \Rightarrow \quad \frac{x+z}{y+z} > \frac{x}{y}.$$

Áp dụng bài toán phụ ta có : $\frac{A+a+B+b}{A+a+B+b+c+d} > \frac{A+a}{A+a+c+d}$

Tương tự : $\frac{B+b+C+c}{B+b+C+c+a+d} > \frac{C+c}{C+c+a+d}$

Mà

$$\frac{A+a}{A+a+c+d} + \frac{C+c}{C+c+a+d} > \frac{A+a}{C+c+A+a+b+d} + \frac{C+c}{C+c+A+a+b+d}$$

Do đó :

$$\frac{A+a+B+b}{A+a+B+b+c+d} + \frac{B+b+C+c}{B+b+C+c+a+d} > \frac{C+c+A+a}{C+c+A+a+b+d}.$$

Câu 2. a, b > 0 theo bất đẳng thức Côsi cho hai số dương ta có :

$$\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab} \quad (1) \quad \Rightarrow \quad \frac{(a+b)^2}{4} \geq ab \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{a} + \frac{1}{b} \geq \frac{4}{a+b} \quad (2)$$

$\frac{1}{ab} \geq \frac{4}{(a+b)^2}$ (3) Áp dụng (1), (2), (3) ta có :

$$A = \left(\frac{1}{x^2+y^2} + \frac{1}{2xy}\right) + \left(4xy + \frac{1}{4xy}\right) + \frac{5}{4}.\frac{1}{xy}$$

$$\geq \frac{4}{x^2+y^2+2xy} + 2\sqrt{4xy.\frac{1}{4xy}} + \frac{5}{4}.\frac{4}{(x+y)^2} = \frac{4}{(x+y)^2} + 2 + \frac{5}{(x+y)^2}$$

$$\geq 4 + 2 + 5 = 11$$

$A \geq 11$. Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow \quad x = y = \frac{1}{2}$

Vậy A đạt giá trị nhỏ nhất là 11.

Câu 3. Gọi các ước nguyên tố của số N là p, q, r và $p < q < r$.

$$\Rightarrow \quad p = 2; \quad q + r = 18 \quad \Rightarrow \quad \left[\begin{array}{l} q = 5;\ r = 13 \\ q = 7;\ r = 11 \end{array}\right. \quad \Rightarrow \quad \left[\begin{array}{l} N = 2^a.5^b.13^c \\ N = 2^a.7^b.11^c \end{array}\right.$$

Với $a, b, c \in N$ và $(a+1)(b+1)(c+1) = 12$.

$12 = 2.2.3$

Do đó N có thể là : $2^2.5.13;\ 2.5^2.13;\ 2.5.13^2;\ 2^2.7.11;\ 2.7^2.11;\ 2.7.11^2$.

N nhỏ nhất nên $N = 2^2.5.13 = 260$.

Câu 4. Dễ thấy z^2 chia hết cho 3 $\Rightarrow$ z^2 chia hết cho 9.

- Xét $z^2 = 0$. Ta có $3x^2 + 6y^2 - 18x - 6 = 0$

$$\Leftrightarrow \quad 3(x-3)^2 + 6y^2 = 33 \quad \Leftrightarrow \quad (x-3)^2 + 2y^2 = 11$$

$2y^2 \leq 11 \quad \Rightarrow \quad y^2 \leq 2^2 \quad \Rightarrow \quad y^2 = 0^2;\ 1^2;\ 2^2$. Ta lần lượt xét :

+ $y^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad (x-3)^2 = 11$. Vô lí !

+ $y^2 = 1^2 \quad \Rightarrow \quad (x-3)^2 = 3^2 \quad \Rightarrow \quad x - 3 = \pm 3 \quad \Rightarrow \quad x = 6$ hoặc $x = 0$

Có các nghiệm $(x = 6;\ y = 1;\ z = 0)$; $(x = 6;\ y = -1;\ z = 0)$;

$(x = 0;\ y = 1;\ z = 0)$; $(x = 0;\ y = -1;\ z = 0)$.

+ $y^2 = 2^2 \quad \Rightarrow \quad (x-3)^2 = 3$. Vô lí !

- Xét $z^2 \geq 9$. Ta có $3x^2 + 6y^2 + 2z^2 + 3y^2z^2 - 18x - 6 = 0$

$$\Leftrightarrow \quad 3(x-3)^2 + 6y^2 + 2z^2 + 3y^2z^2 = 33$$

+ $y^2 \geq 1$ thì $2z^2 + 3y^2z^2 \geq 2.9 + 3.1.9 > 33$ (loại)

+ $y^2 = 0$ thì $3(x-3)^2 + 2z^2 = 33$

$z^2 = 9$ thì $3(x-3)^2 = 15$ (loại)

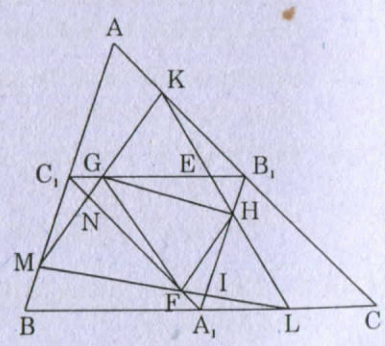
$z^2 > 9 \quad \Rightarrow \quad z^2 \geq 6^2 = 36$ Ta có : $3(x-3)^2 + 2z^2 > 33$ (loại)

Nghiệm nguyên của phương trình là : $(x = 6;\ y = 1;\ z = 0)$;

$(x = 6;\ y = -1;\ z = 0)$; $(x = 0;\ y = 1;\ z = 0)$; $(x = 0;\ y = -1;\ z = 0)$.

Câu 5. *(Hình 21)*

Gọi S là diện tích phần chung của hai tam giác KLM và $A_1B_1C_1$.



Hình 21

Ta có : $A_1B_1 \mathbin{//} AB$

$$\Rightarrow \frac{A_1I}{IH} \leq \frac{BM}{MA} \leq \frac{BC_1}{C_1A} = 1$$

$$\Rightarrow A_1I < IH \quad \Rightarrow \quad S_{FA_1I} \leq S_{FIH}.$$

Chứng minh tương tự ta có :

$$S_{HB_1E} \leq S_{HEG}; \qquad S_{GC_1N} \leq S_{GNF}.$$

Do đó : $S_{FA_1I} + S_{HB_1E} + S_{GC_1N} \leq S_{FIH} + S_{HEG} + S_{GNF} \leq S$

$$\Rightarrow \quad S_{A_1B_1C_1} - S \leq S \quad \Rightarrow \quad S \geq \frac{1}{2}S_{A_1B_1C_1}, \quad \text{mà} \quad S_{A_1B_1C_1} = \frac{1}{4}.$$

Do đó $S \geq \frac{1}{8}$. Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} L \equiv A_1;\ K \equiv A \\ K \equiv B_1;\ M \equiv B \\ M \equiv C_1;\ L \equiv C \end{array}\right.$

Giá trị nhỏ nhất của diện tích phần chung của hai tam giác KLM và $A_1B_1C_1$ là $\frac{1}{8}$.

ĐỀ 13

TRƯỜNG PTTH CHU VĂN AN VÀ TRƯỜNG PTTH HÀ NỘI – AMSTERDAM

Đề thi tuyển sinh vào lớp 10 chuyên Toán, Tin năm học 2005 – 2006

Câu 1. Cho $P = (a + b)(b + c)(c + a) - abc$ với a, b, c là các số nguyên. Chứng minh rằng nếu $a + b + c$ chia hết cho 4 thì P chia hết cho 4.

Câu 2. Cho hệ phương trình : $\begin{cases} (x + y)^4 + 13 = 6x^2y^2 + m \\ xy(x^2 + y^2) = m \end{cases}$.

1. Giải hệ phương trình với $m = -10$.
2. Chứng minh rằng không tồn tại giá trị của m để hệ có nghiệm duy nhất.

Câu 3. Ba số dương x, y, z thỏa mãn hệ thức : $\frac{1}{x} + \frac{2}{y} + \frac{3}{z} = 6$. Xét biểu thức $P = x + y^2 + z^3$.

1. Chứng minh rằng $P \geq x + 2y + 3z - 3$.
2. Tìm giá trị nhỏ nhất của P.

Câu 4. Cho tam giác ABC, lấy ba điểm D, E, F theo thứ tự trên các cạnh BC, CA, AB sao cho AEDF là tứ giác nội tiếp. Trên tia AD lấy điểm P (D nằm giữa A và P) sao cho DA.DP = DB.DC.

1. Chứng minh rằng tứ giác ABPC nội tiếp và hai tam giác DEF, PCB đồng dạng với nhau.
2. Gọi S và S' lần lượt là diện tích hai tam giác ABC và DEF. Chứng minh : $\frac{S'}{S} \leq \left(\frac{EF}{2AD}\right)^2$.

Câu 5. Cho hình vuông ABCD và 2005 đường thẳng đồng thời thỏa mãn hai điều kiện :

1. Mỗi đường thẳng đều cắt hai cạnh đối của hình vuông.
2. Mỗi đường thẳng đều chia hình vuông thành hai phần có tỉ số diện tích là 0,5.

Chứng minh rằng trong 2005 đường thẳng đó có ít nhất 502 đường đồng quy.

BÀI GIẢI

Câu 1. Đặt $T = a + b + c$.

P được viết lại : $P = (T - a)(T - b)(T - c) - abc$

$$= (ab + bc + ca)T - 2abc + T^3 - (a + b + c)T^2 \qquad (1)$$

Vì T chia hết cho 4 nên trong ba số a, b, c có ít nhất một số chẵn.

Từ (1) suy ra P chia hết cho 4 (đpcm).

Câu 2.

1. $\begin{cases} (x + y)^4 + 13 = 6x^2y^2 + m \\ xy(x^2 + y^2) = m \end{cases}$ Đặt $u = (x + y)^2$, $v = xy$.

Với $m = -10$ hệ có dạng : $\begin{cases} u^2 - 6v^2 + 23 = 0 & (1) \\ uv - 2v^2 = -10 & (2) \end{cases}$

Từ (2) có $u = \frac{2v^2 - 10}{v}$, thay vào (1) ta được : $2v^4 + 17v^2 - 100 = 0 \qquad (3)$

Giải (3) ta được : $v^2 = 4$ hoặc $v^2 = -\frac{25}{2}$ (loại) $\Rightarrow v = \pm 2$.

Từ (2) ta thấy $v < 0$ nên chọn $v = -2$.

Với $v = -2$ thì $u = 1 \Rightarrow x + y = 1$ hoặc $x + y = -1$.

Giải các hệ : $\begin{cases} x + y = 1 \\ xy = -2 \end{cases}$ và $\begin{cases} x + y = -1 \\ xy = -2 \end{cases}$,

ta được nghiệm (x; y) là : (–1; 2), (2; –1), (1; –2), (–2; 1).

2. Nếu (x; y) là nghiệm của hệ thì (–x; –y) cũng là nghiệm của hệ đó.

Do đó hệ có nghiệm duy nhất thì $x = y = 0$.

Thay $x = y = 0$ vào hệ thấy không thỏa.

Vậy không có giá trị nào của m để hệ có nghiệm duy nhất.

Câu 3.

1. Ta có : $P + 3 = x + (y^2 + 1) + (z^3 + 1 + 1) \geq x + 2y + 3z$

(theo bất đẳng thức Cô-si)

$\Rightarrow P \geq x + 2y + 3z - 3$ (đpcm).

2. Áp dụng kết quả câu 1) và bất đẳng thức Bunhiacopski ta có :

$$6(P + 3) \geq (x + 2y + 3z)\left(\frac{1}{x} + \frac{2}{y} + \frac{3}{z}\right) \geq \left(\sqrt{x}\frac{1}{\sqrt{x}} + \sqrt{2y}\sqrt{\frac{2}{y}} + \sqrt{3z}\sqrt{\frac{3}{z}}\right)^2 = 36$$

$\Leftrightarrow P \geq 3$.

Vậy giá trị nhỏ nhất của P là 3, đạt được khi $x = y = z = 1$.

Câu 4. *(Hình 22)*

1. Từ $DA.DP = DB.DC \Rightarrow \frac{DP}{DB} = \frac{DC}{DA} \qquad (1)$

Ta có $\widehat{BDP} = \widehat{ADC}$ (2)

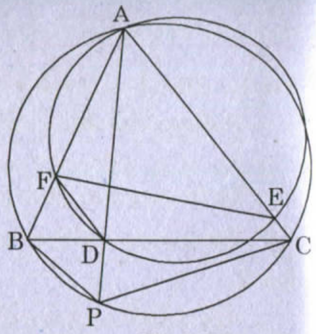
Từ (1) và (2) suy ra $\Delta BDP \backsim \Delta ADC$

$\Rightarrow \widehat{DPB} = \widehat{DCA}$

$\Rightarrow$ tứ giác ABPC nội tiếp.

Vì các tứ giác AEDF và ABPC nội tiếp nên $\widehat{BAP} = \widehat{DEF} = \widehat{BCP}$; $\widehat{DFE} = \widehat{DAE} = \widehat{CBP}$.

$\Rightarrow \Delta DEF \backsim \Delta PCB$ (đpcm).



Hình 22

2. Do $\Delta DEF \backsim \Delta PCB$ nên $S' = \left(\frac{EF^2}{BC^2}\right)S_{PCB}$ (1)

Mặt khác $S_{PCB} = \frac{DP}{DA}.S$. Thay vào (1) có : $S' = \left(\frac{EF^2}{BC^2}\right)\frac{DP}{DA}.S$ (2)

Ta lại có $\frac{1}{BC^2} = \frac{1}{(BD + DC)^2} \le \frac{1}{4BD.DC} = \frac{1}{4DA.DP}$ (3)

Từ (2) và (3) suy ra : $S' \le \frac{EF^2}{4DA.DP}.\frac{DP}{DA}.S = \left(\frac{EF}{2DA}\right)^2.S$ (đpcm).

Câu 5. *(Hình 23)*

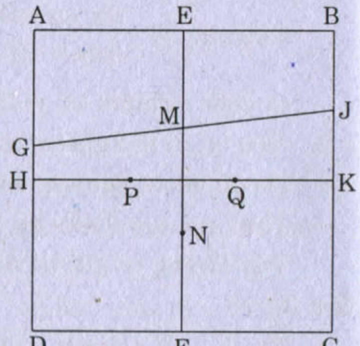
Đặt AB = AD = a. Gọi EF và HK là hai trục đối xứng của hình vuông ABCD (EF // AD, HK // AB).

Giải sử một đoạn thẳng cắt các đoạn AD, BC, EF lần lượt tại G, J, M sao cho $S_{CDGJ} = 2S_{ABJG}$ thì

$DG + CJ = 2(AG + BJ).$

Hay $(a - AG) + (a - BJ) = 2AG + 2BJ.$

Từ đó $AG + BJ = \frac{2a}{3}$, hay $EM = \frac{a}{3}$.



Hình 23

Suy ra M là điểm cố định. Lấy N trên EF, các điểm P, Q trên HK sao cho $EM = MN = NF = HP = PQ = QK = \frac{a}{3}$.

Tương tự như trên ta thấy các đường thẳng thỏa mãn điều kiện của đề bài phải đi qua một trong bốn điểm cố định M, N, P, Q.

Theo nguyên lí Dirichlet từ 2005 đường thẳng thỏa mãn điều kiện của đề bài có ít nhất $502 = \left[\frac{2005}{4}\right] + 1$ đường thẳng đi qua một trong bốn điểm trên, nghĩa là 502 đường thẳng đó đồng quy.

ĐỀ 14

TRƯỜNG PTTH CHU VĂN AN VÀ TRƯỜNG PTTH HÀ NỘI – AMSTERDAM

Đề thi tuyển sinh vào lớp 10 chuyên Khoa học Tự nhiên năm 2005 – 2006

Câu 1. Cho biểu thức $P = \frac{x\sqrt{x} - 1}{x - \sqrt{x}} - \frac{x\sqrt{x} + 1}{x + \sqrt{x}} + \frac{x + 1}{\sqrt{x}}$.

1. Rút gọn P. **2.** Tìm x để $P = \frac{9}{2}$.

Câu 2. Cho bất phương trình : $3(m - 1)x + 1 > 2m + x$ (m là tham số).

1. Giải bất phương trình với $m = 1 - 2\sqrt{2}$.

2. Tìm m để bất phương trình nhận mọi giá trị $x > 1$ là nghiệm.

Câu 3. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy cho đường thẳng (d) : $2x - y - a^2 = 0$ và parabol (P) : $y = ax^2$ (a là tham số dương).

1. Tìm a để (d) cắt (P) tại hai điểm phân biệt A, B. Chứng minh rằng khi đó A, B nằm về bên phải trục tung.

2. Gọi u, v theo thứ tự là hoành độ của A, B. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $T = \frac{4}{u + v} + \frac{1}{uv}$.

Câu 4. Đường tròn tâm O có dây cung AB cố định và I là điểm chính giữa cung lớn AB. Lấy điểm M bất kì trên cung lớn AB, dựng tia Ax vuông góc với đường thẳng MI tại H và cắt BM tại C.

1. Chứng minh các tam giác AIB và ACM là các tam giác cân.

2. Khi điểm M di động trên cung lớn AB. Chứng minh rằng điểm C di chuyển trên một cung tròn cố định.

3. Xác định vị trí của điểm M để chu vi tam giác AMC đạt giá trị lớn nhất.

Câu 5. Cho tam giác vuông ở A có AB < AC và trung tuyến AM, $\widehat{ACB} = \alpha$, $\widehat{AMB} = \beta$. Chứng minh rằng : $(\sin\alpha + \cos\alpha)^2 = 1 + \sin\beta$.

BÀI GIẢI

Câu 1.

1. Điều kiện : $x \neq 1$ và $x > 0$.

Ta có : $P = \frac{(\sqrt{x} - 1)(x + \sqrt{x} + 1)}{\sqrt{x}(\sqrt{x} - 1)} - \frac{(\sqrt{x} + 1)(x - \sqrt{x} + 1)}{\sqrt{x}(\sqrt{x} + 1)} + \frac{x + 1}{\sqrt{x}}$

$= \frac{x + \sqrt{x} + 1 - x + \sqrt{x} - 1 + x + 1}{\sqrt{x}} = \frac{(\sqrt{x} + 1)^2}{\sqrt{x}}$

Vậy $P = \dfrac{(\sqrt{x}+1)^2}{\sqrt{x}}$.

2. $P = \dfrac{9}{2} \Leftrightarrow \dfrac{(\sqrt{x}+1)^2}{\sqrt{x}} = \dfrac{9}{2} \Leftrightarrow 2x - 5\sqrt{x} + 2 = 0 \Rightarrow x = 4$ và $x = \dfrac{1}{4}$.

Vậy $x = 4$ và $x = \dfrac{1}{4}$ thỏa mãn $P = \dfrac{9}{2}$.

Câu 2.

1. Với $m = 1 - 2\sqrt{2}$, bất phương trình đã cho có dạng :

$$-(6\sqrt{2}+1)x > 1 - 4\sqrt{2} \quad \Leftrightarrow \quad x < \frac{4\sqrt{2}-1}{6\sqrt{2}+1}.$$

2. $3(m-1)x + 1 > 2m + x \quad \Leftrightarrow \quad (3m-4)x + 1 - 2m > 0 \qquad (1)$

Xét hàm số $f(x) = (3m-4)x + 1 - 2m$.

Đồ thị của hàm số f(x) là một đường thẳng nên để bất phương trình (1) đúng với mọi $x > 1$ thì : $\begin{cases} 3m - 4 > 0 \\ f(1) = m - 3 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \quad m \geq 3.$

Vậy với mọi $m \geq 3$ thì phương trình đã cho nhận mọi giá trị $x > 1$ là nghiệm.

Câu 3.

1. Phương trình hoành độ giao điểm của đường thẳng (d) và parabol (P) có dạng : $ax^2 - 2x + a^2 = 0 \qquad (1)$

Đường thẳng (d) cắt (P) tại 2 điểm phân biệt A, B $\Leftrightarrow \begin{cases} a > 0 \Leftrightarrow 0 < a < 1 \\ \Delta' = 1 - a^3 > 0 \end{cases}$

Gọi u, v lần lượt là hoành độ của A và B.

Theo định lí Viet cho (1) ta có : $\begin{cases} u + v = \dfrac{2}{a} > 0 \\ u.v = a > 0 \end{cases}$

Suy ra A, B nằm về bên phải trục tung (đpcm).

2. Từ kết quả câu 1) ta có : $T = 2a + \dfrac{1}{a} \geq 2\sqrt{2a.\dfrac{1}{a}} = 2\sqrt{2}$.

Vậy giá trị nhỏ nhất của T là $2\sqrt{2}$, đạt được khi $a = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

Câu 4. *Hình (24a, b)*

1. Vì I là điểm chính giữa cung lớn AB nên IA = IB hay ΔAIB cân tại I.

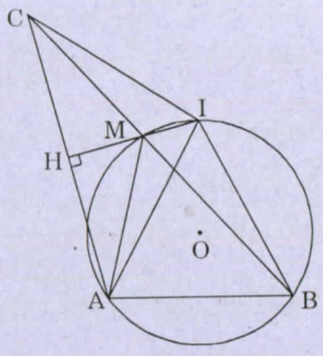
- Nếu M thuộc cung IA (không chứa B) (như hình 24a) thì $\widehat{CMH} = \widehat{IMB}$ (1)

Mặt khác sđ $\widehat{AMH} = \dfrac{1}{2}(\text{sđ}\,\overset{\frown}{AM} + \text{sđ}\,\overset{\frown}{MI}) = \dfrac{1}{2}\text{sđ}\,\overset{\frown}{IA} = \dfrac{1}{2}\text{sđ}\,\overset{\frown}{IB} = \text{sđ}\,\widehat{IMB}$ (2)

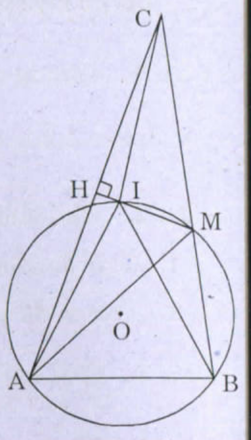
Từ (1) và (2) suy ra tam giác AMC cân tại M.

- Nếu M thuộc cung IB (không chứa A) (như hình 24b).

Chứng minh tương tự ta cũng có ΔAMC cân tại M.



Hình 24a



Hình 24b

2. Theo kết quả câu 1) thì IA = IC, mà IA không đổi nên C nằm trên đường tròn tâm I bán kính IA.

Khi M ≡ A thì C ≡ A, còn khi M ≡ B thì C ≡ C_1 (trong đó C_1 là giao điểm của đường tròn tâm I bán kính IA với đường thẳng qua A vuông góc IB).

Do đó khi M chuyển động trên cung lớn $\overset{\frown}{AB}$ thì điểm C chuyển động trên cung $\overset{\frown}{AC_1}$ (đpcm).

3. Giả sử C_0 là giao điểm của AI với đường tròn tâm I bán kính IA, còn M_0 là điểm đối xứng của A qua O.

Nhận xét rằng khi tia Ax trùng với tia AI thì M trùng với M_0, lúc đó B, M_0, C_0 thẳng hàng. Từ mối liên hệ giữa dây cung và đường kính ta có $AM \leq AM_0$, $AC \leq AC_0$.

Gọi p là chu vi. Ta có : $p\,(AMC) \leq p\,(AM_0C_0)$.

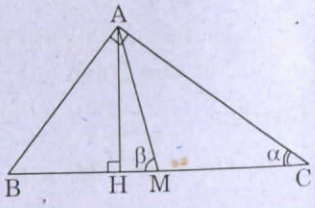
Vậy giá trị lớn nhất của p (AMC) là $p\,(AM_0C_0)$, đạt được khi M là điểm xuyên tâm đối của A đối với đường tròn (O).

Câu 5. *(Hình 25)*

Kẻ AH vuông góc BC.

Do AB < AC nên H thuộc đoạn BM.

Ta có : $\quad AH = AM.\sin\beta = \dfrac{1}{2}BC.\sin\beta \qquad (1)$



Hình 25

Mặt khác $AH = AC.\sin\alpha = BC\sin\alpha\cos\alpha \qquad (2)$

Từ (1) và (2) suy ra : $\quad \sin\beta = 2\sin\alpha\cos\alpha$

$$\Rightarrow \quad 1 + \sin\beta = (\sin\alpha + \cos\alpha)^2 \quad \text{(đpcm)}.$$

ĐỀ 15

TRƯỜNG PTTH CHU VĂN AN VÀ TRƯỜNG PTTH HÀ NỘI – AMSTERDAM

Đề thi tuyển sinh vào lớp 10 chuyên Toán, Tin năm học 2004 – 2005

Câu 1. Chứng minh rằng số tự nhiên

$$A = 1.2.3...2003.2004\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+...+\frac{1}{2003}+\frac{1}{2004}\right) \text{ chia hết cho 2005.}$$

Câu 2. Cho phương trình : $x + 3(m - 3x^2)^2 = m$.

1. Giải phương trình với m = 2.
2. Tìm m để phương trình có nghiệm.

Câu 3. Giải bất phương trình : $\sqrt[3]{25x(2x^2+9)} \ge 4x + \dfrac{3}{x}$.

Câu 4. Cho tam giác ABC có ba góc nhọn, kẻ đường cao BE, CF.

1. Cho biết số đo góc BAC bằng 60^0, tính độ dài EF theo BC = a.
2. Trên nửa đường tròn đường kính BC không chứa E, F lấy một điểm M bất kì. Gọi H, I, K lần lượt là hình chiếu vuông góc của M trên BC, CE, EB. Tìm giá trị nhỏ nhất của tổng $S = \dfrac{BC}{MH} + \dfrac{CE}{MI} + \dfrac{EB}{MK}$.

Câu 5. Cho một đa giác có chu vi bằng 1, chứng minh rằng có một hình tròn bán kính $r = \dfrac{1}{4}$ chứa toàn bộ đa giác đó.

BÀI GIẢI

Câu 1. Biến đổi : $C = \left(1+\dfrac{1}{2004}\right)+\left(\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2003}\right)+...+\left(\dfrac{1}{2002}+\dfrac{1}{1003}\right)$

$$= 2005\left(\frac{1}{2004}+\frac{1}{2.2003}+...+\frac{1}{1002.1003}\right) = 2005.k$$

Vì A = 2005k.B (với B = 1.2.3...2004) mà k.B là số nguyên nên A chia hết cho 2005.

Câu 2.

1. Đặt $m - 3x^2 = t \Rightarrow t + 3x^2 = m$.

Ta có hệ : $\begin{cases} x + 3t^2 = m \\ t + 3x^2 = m \end{cases} \Rightarrow (x - t) + 3(t - x)(t + x) = 0$

$\Rightarrow (t - x)(3x + 3t - 1) = 0 \Rightarrow t = x$ hoặc $3x + 3t = 1$.

Thế vào phương trình đầu của hệ dẫn tới : $\left[\begin{array}{l} 3x^2 + x - m = 0 \\ 9x^2 - 3x + 1 - 3m = 0 \end{array}\right.$ (*)

Khi m = 2. Giải (*) ta được $x_1 = -1$; $x_2 = \dfrac{2}{3}$; $x_3 = \dfrac{1+\sqrt{21}}{6}$; $x_4 = \dfrac{1-\sqrt{21}}{6}$.

2. Phương trình đã cho có nghiệm khi (*) có nghiệm :

$$\left[\begin{array}{l} \Delta_1 \ge 0 \\ \Delta_2 \ge 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 1 + 12m \ge 0 \\ 9 - 36(1 - 3m) \ge 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow m \ge -\frac{1}{12}.$$

Câu 3. Điều kiện : $x \ne 0$.

– Với x > 0. Nhân hai vế bất phương trình với x ta được :

$$\sqrt[3]{25x^4(2x^2+9)} \ge 4x^2 + 3 \quad (1)$$

Theo bất đẳng thức Côsi cho ba số dương ta có :

$$5x^2 + 5x^2 + (2x^2 + 9) \ge 3.\sqrt[3]{25x^4(2x^2+9)}$$

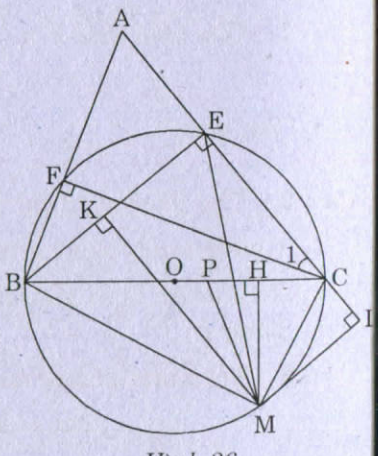
$$\Leftrightarrow \quad 4x^2 + 3 \ge \sqrt[3]{25x^4(2x^2+9)} \quad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra để bất phương trình có nghiệm, dấu đẳng thức phải xảy ra ở bất đẳng thức (2), lúc đó : $5x^2 = 2x^2 + 9 \Rightarrow x = \sqrt{3}$.

– Với x < 0. Nhân hai vế với x ta có : $\sqrt[3]{25x^4(2x^2+9)} \le 4x^2 + 3$

Bất phương trình trên đúng với mọi x < 0.

Câu 4. *(Hình 26)*



Hình 26

1. Gọi O là trung điểm BC.

Do $\hat{A} = 60^0 \Rightarrow \hat{C}_1 = 30^0$

$\Rightarrow \widehat{EOF} = 2\hat{C}_1 = 60^0$

$\Rightarrow \Delta EOF$ đều $\Rightarrow EF = \dfrac{a}{2}$.

2. Lấy điểm P trên BC sao cho $\widehat{BMP} = \widehat{EMC}$.

Do $\Delta CME \backsim \Delta PMB$ (g.g) $\Rightarrow \dfrac{BP}{MH} = \dfrac{EC}{MI}$.

$\Delta MEB \backsim \Delta MCP$ (g.g) $\Rightarrow \dfrac{EB}{MK} = \dfrac{CP}{MH}$.

Vậy $\dfrac{BP + PC}{MH} = \dfrac{EC}{MI} + \dfrac{EB}{MK} \Rightarrow \dfrac{BC}{MH} = \dfrac{EC}{MI} + \dfrac{EB}{MK} \Rightarrow S = \dfrac{2BC}{MH}$.

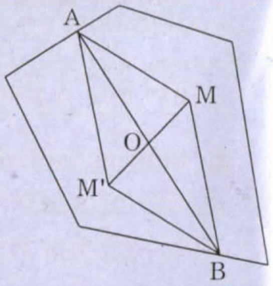
Khi M là điểm chính giữa cung BC thì MH đạt cực đại, lúc đó S cực tiểu và giá trị nhỏ nhất của S là 4.

Câu 5. *(Hình 27)*

Lấy điểm A trên biên của đa giác.

Lấy điểm B trên biên của đa giác sao cho AB chia chu vi đa giác thành hai phần có độ dài mỗi phần bằng $\frac{1}{2}$.

Gọi O là trung điểm của AB. Giả sử M là một điểm tùy ý thuộc biên hoặc miền trong đa giác, lấy M' đối xứng M qua O.



Hình 27

Tứ giác AMBM' là hình bình hành và AM + MB < $\frac{1}{2}$.

Mà MM' < AM + MB $\Rightarrow$ MM' < $\frac{1}{2}$ $\Rightarrow$ OM < $\frac{1}{4}$ nên M nằm trong đường tròn tâm O bán kính r = $\frac{1}{4}$ (đpcm).

ĐỀ 16

TRƯỜNG PTTH CHU VĂN AN VÀ TRƯỜNG PTTH HÀ NỘI – AMSTERDAM

Đề thi tuyển sinh vào lớp 10 chuyên Khoa học Tự nhiên năm 2004 – 2005

Câu 1. Cho biểu thức $P = \left(\frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}+1} - \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-1}\right)\left(\frac{1}{2\sqrt{x}} - \frac{\sqrt{x}}{2}\right)^2$.

1. Rút gọn P.
2. Tìm x để $\frac{P}{\sqrt{x}} > 2$.

Câu 2. Cho phương trình : $x^2 - (m-2)x - m^2 + 3m - 4 = 0$ (m là tham số).

1. Chứng minh phương trình có 2 nghiệm phân biệt với mọi giá trị của m.
2. Tìm m để tỉ số giữa hai nghiệm của phương trình có giá trị tuyệt đối bằng 2.

Câu 3. Trên mặt phẳng tọa độ cho đường thẳng (d) có phương trình :

$$2kx + (k-1)y = 2 \qquad \text{(k là tham số)}$$

1. Với giá trị nào của k thì đường thẳng (d) song song với đường thẳng $y = x\sqrt{3}$? Khi đó hãy tính góc tạo bởi (d) với tia Ox.
2. Tìm k để khoảng cách từ gốc tọa độ đến đường thẳng (d) là lớn nhất.

Câu 4. Cho góc vuông xOy và hai điểm A, B trên cạnh Ox (A nằm giữa O và B), điểm M bất kì trên cạnh Oy. Đường tròn (T) đường kính AB cắt tia MA, MB lần lượt tại điểm thứ hai là C, E. Tia OE cắt đường tròn (T) tại điểm thứ hai là F.

1. Chứng minh 4 điểm O, A, E, M nằm trên một đường tròn, xác định tâm của đường tròn đó.
2. Tứ giác OCFM là hình gì ? Tại sao ?
3. Chứng minh hệ thức $OE.OF + BE.BM = OB^2$.
4. Xác định vị trí của điểm M để tứ giác OCFM là hình bình hành. Tìm mối quan hệ giữa OA và AB để tứ giác là hình thoi.

BÀI GIẢI

Câu 1.

1. Điều kiện : $x > 0$ và $x \neq 1$.

Rút gọn $A = \frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}+1} - \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-1} = \frac{(\sqrt{x}-1)^2 - (\sqrt{x}+1)^2}{1-x} = \frac{4\sqrt{x}}{1-x}$.

$$B = \left(\frac{1}{2\sqrt{x}} - \frac{\sqrt{x}}{2}\right) = \left(\frac{2-2x}{4\sqrt{x}}\right) = \frac{(1-x)}{2\sqrt{x}}.$$

Suy ra $P = A.B = \frac{4\sqrt{x}}{1-x} . \frac{(1-x)^2}{4x} = \frac{1-x}{\sqrt{x}}$.

2. $\frac{P}{\sqrt{x}} > 2 \Leftrightarrow \frac{1-x}{(\sqrt{x})^2} > 2 \Leftrightarrow x < \frac{1}{3}$.

Kết hợp với điều kiện ta được : $0 < x < \frac{1}{3}$.

Câu 2.

1. Phương trình bậc hai có a = 1; $c = -m^2 + 3m - 4 = -\left(m - \frac{3}{2}\right)^2 - \frac{7}{4} < 0 \ \forall m$.

$\Rightarrow$ a.c < 0 $\Rightarrow$ phương trình đã cho luôn có 2 nghiệm phân biệt trái dấu.

2. Gọi x_1, x_2 là hai nghiệm của phương trình bậc hai đã cho.

Theo điều kiện đề bài ta có : $x_1 = -2x_2$ hoặc $x_2 = -2x_1$.

$\Leftrightarrow (x_1 + 2x_2)(x_2 + 2x_1) = 0 \Leftrightarrow x_1x_2 + 2(x_1 + x_2)^2 = 0$ (*)

Theo định lí Viet : $x_1 + x_2 = m - 2$, $x_1.x_2 = -m^2 + 3m - 4$.

Thay vào (*) ta được : $m^2 - 5m + 4 = 0 \Leftrightarrow m_1 = 1;\ m_2 = 4$.

Câu 3.

1. Với k = 1 thì phương trình đường thẳng (d) là : x = 1, (d) không song song với đường thẳng $y = \sqrt{3}x$.

Với $k \neq 1$ thì phương trình đường thẳng (d) có dạng :

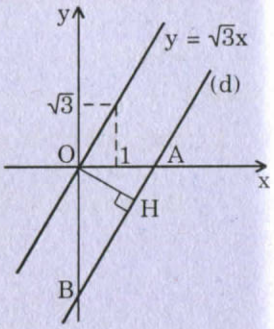
$$y = -\frac{2k}{k-1}x + \frac{2}{k-1} \qquad (**)$$

Điều kiện cần và đủ để (d) song song với đường thẳng $y = \sqrt{3}x$ là :

$$\frac{-2k}{k-1} = \sqrt{3} \quad \Rightarrow \quad k = \sqrt{3}(2-\sqrt{3}).$$

Khi đó góc nhọn α tạo bởi (d) với tia Ox có $tg\alpha = \sqrt{3} \Rightarrow \alpha = 60^0$.

2.– Với k = 1. Khoảng cách từ 0 đến (d) là 1.



– Với k = 0. Phương trình đường thẳng (d) có dạng y = –2. Khoảng cách từ O đến (d) là 2.

– Với k ≠ 0 và k ≠ 1. Gọi A, B lần lượt là giao điểm của (d) với Ox, Oy.

Thay y = 0 vào (**) $\Rightarrow x_A = \frac{1}{k} \Rightarrow OA = \left|\frac{1}{k}\right|$.

Thay x = 0 vào (**) $\Rightarrow y_B = \frac{2}{k-1} \Rightarrow OB = \left|\frac{2}{k-1}\right|$.

Rõ ràng (d) không đi qua gốc tọa độ với mọi k ≠ 0 và k ≠ 1.

Trong tam giác vuông AOB ta có :

$$\frac{1}{OH^2} = \frac{1}{OA^2} + \frac{1}{OB^2} \quad \Rightarrow \quad OH = \frac{2}{\sqrt{5k^2 - 2k + 1}}.$$

Ta có : $5k^2 - 2k + 1 = 5\left(k - \frac{1}{5}\right)^2 + \frac{4}{5} \geq \frac{4}{5} \ \forall k.$

Do đó $OH \leq \frac{2}{\sqrt{\frac{4}{5}}} = \sqrt{5}$. Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow k = \frac{1}{5}$.

Vậy khoảng cách từ O đến đường thẳng (d) lớn nhất là $\sqrt{5}$ khi $k = \frac{1}{5}$.

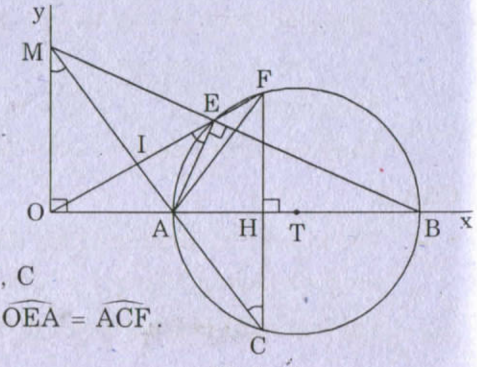
Câu 4. *(Hình 28)*

1. Ta có $\widehat{AOM} = \widehat{AEM} = 90^0$.

Nên tứ giác OAEM nội tiếp đường tròn đường kính MA.

2. Tứ giác OAEM nội tiếp

$\Rightarrow \widehat{OMA} = \widehat{OEA}$. Bốn điểm A, E, F, C cùng nằm trên đường tròn (T) nên $\widehat{OEA} = \widehat{ACF}$.



Hình 28

Do đó $\widehat{OMA} = \widehat{ACF} \Rightarrow FC \,//\, OM$. Vậy OCFM là hình thang.

3. $\Delta OFA \backsim \Delta OBE$ (g.g) $\Rightarrow \frac{OF}{OB} = \frac{OA}{OE} \Rightarrow OE.OF = OA.OB$ (1)

$\Delta OBM \backsim \Delta EBA$ (g.g) $\Rightarrow \frac{OB}{EB} = \frac{BM}{BA} \Rightarrow BE.BM = BA.BO$ (2)

Từ (1) và (2) ta có : $OE.OF + BE.BM = OB^2$.

4. Gọi giao điểm của CM với OF là I và CF với OB là H.

Hình thang OCFM là hình bình hành ⇔ I là trung điểm OF ⇔ A là trọng tâm ΔCOF ⇔ OA = 2AH.

Từ đó ta có cách dựng sau :

- Dựng điểm H trên tia OA thỏa mãn OA = 2AH.
- Qua H dựng đường thẳng vuông góc với OB cắt (T) tại F và C.
- Nối CA cắt Ox tại M thì M là điểm cần dựng.

Khi OCFM là hình bình hành, muốn nó là hình thoi thì CI ⊥ OF.

Suy ra ΔOCF đều, A là tâm của tam giác đều OCF nên $\widehat{CAT} = 60^0$

$$\Rightarrow OA = AC = AT = \frac{AB}{2}.$$

ĐỀ 17

TRƯỜNG PTTH CHU VĂN AN VÀ TRƯỜNG PTTH HÀ NỘI – AMSTERDAM

Đề thi tuyển sinh vào lớp 10 chuyên Khoa học Tự nhiên năm 2003 – 2004

Câu 1. Cho biểu thức : $P = \frac{x^2 - \sqrt{x}}{x + \sqrt{x} + 1} - \frac{2x + \sqrt{x}}{\sqrt{x}} + \frac{2(x-1)}{\sqrt{x} - 1}$.

1. Rút gọn P. **2.** Tìm giá trị nhỏ nhất của P.

3. Tìm x để biểu thức $Q = \frac{2\sqrt{x}}{P}$ nhận giá trị là số nguyên.

Câu 2. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho parabol (P) : $y = -x^2$ và đường thẳng (d) đi qua điểm I(0; –1) có hệ số góc k.

1. Viết phương trình đường thẳng (d). Chứng minh với mọi giá trị k, (d) luôn cắt (P) tại hai điểm phân biệt A và B.

2. Gọi hoành độ của A và B là x_1 và x_2, chứng minh $|x_1 - x_2| \geq 2$.

3. Chứng minh tam giác OAB vuông.

Câu 3. Cho đoạn thẳng AB = 2a có trung điểm là O. Trên cùng nửa mặt phẳng bờ AB dựng nửa đường tròn (O) đường kính AB và nửa đường tròn (O') đường kính AO. Trên (O') lấy một điểm M (khác A và O), tia OM cắt (O) tại C, gọi D là giao điểm thứ hai của CA với (O').

1. Chứng minh tam giác ADM cân.
2. Tiếp tuyến tại C của (O) cắt tia OD tại E, xác định vị trí tương đối của đường thẳng EA đối với (O) và (O').
3. Đường thẳng AM cắt OD tại H, đường tròn ngoại tiếp tam giác COH cắt (O) tại điểm thứ hai là N. Chứng minh ba điểm A, M và N thẳng hàng.
4. Tại vị trí của M sao cho ME // AB, hãy tính độ dài đoạn thẳng OM theo a.

BÀI GIẢI

Câu 1.

1. Điều kiện : $x > 0$ và $x \neq 1$.

Ta có : $P = \dfrac{\sqrt{x}(\sqrt{x}-1)(x+\sqrt{x}+1)}{x+\sqrt{x}+1} - 2\sqrt{x} - 1 + 2(\sqrt{x}+1) = x - \sqrt{x} + 1$.

2. $P = x - \sqrt{x} + 1 = \left(\sqrt{x} - \dfrac{1}{2}\right)^2 + \dfrac{3}{4} \geq \dfrac{3}{4}$.

Vậy giá trị nhỏ nhất của P là $\dfrac{3}{4}$ đạt được khi $x = \dfrac{1}{4}$.

3. $Q = \dfrac{2\sqrt{x}}{P} = \dfrac{2}{\sqrt{x} + \dfrac{1}{\sqrt{x}} - 1} = \dfrac{2}{M}$.

Nhận xét rằng với $x > 0$, $x \neq 1$, ta có :

$M = \sqrt{x} + \dfrac{1}{\sqrt{x}} - 1 > 1$ (Bất đẳng thức Côsi)

Suy ra $0 < Q < 2$. Vì Q nguyên nên $Q = 1 \Rightarrow x = \dfrac{7 \pm 3\sqrt{5}}{2}$. Thử lại đúng.

Câu 2.

1. Phương trình đường thẳng (d) : $y = kx - 1$.

Phương trình hoành độ giao điểm của (P) và (d) : $x^2 + kx - 1 = 0$ (*)

Vì (*) có $\Delta = k^2 + 4 > 0$ $\forall k$ nên (d) luôn cắt (P) tại hai điểm phân biệt.

2. Ta có : $x_1x_2 = -1$, từ đó $|x_1 - x_2| = \left|x_1 + \dfrac{1}{x_1}\right|$.

Nhận xét rằng x_1 và $\dfrac{1}{x_1}$ cùng dấu nên $\left|x_1 + \dfrac{1}{x_1}\right| = |x_1| + \left|\dfrac{1}{x_1}\right| \geq 2$.

Vậy $|x_1 - x_2| \geq 2$ (đpcm).

3. Phương trình đường thẳng OA là : $y = -x_1x$.

Phương trình đường thẳng OB là : $y = -x_2x$.

Vì $(-x_1)(-x_2) = -1$, suy ra tam giác OAB vuông tại O.

Câu 3. *(Hình 29)*

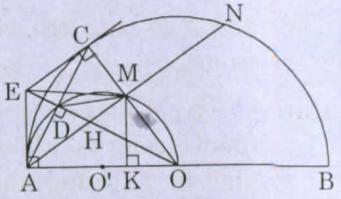
1. Ta có ΔOAC cân tại O có $OD \perp AC$, suy ra $\widehat{MOD} = \widehat{DOA}$

$\Rightarrow DM = AD$ hay ΔDAM cân tại D.

2. Dễ thấy $\Delta AOE = \Delta COE$ (c.g.c).

Suy ra $\widehat{EAO} = \widehat{ECO} = 90^0$ hay $EA \perp AB$.

Hay EA là tiếp tuyến chung của đường tròn (O) và đường tròn (O').



Hình 29

3. Giả sử AM cắt đường tròn (O) tại N', để ý rằng $\widehat{AOC} = 2\widehat{AN'C}$ nên $\widehat{COH} = \widehat{CN'H}$ dẫn đến tứ giác CHON' nội tiếp được trong một đường tròn, từ đó ta thấy $N' \equiv N$, suy ra A, M, N thẳng hàng.

4. Kẻ $MK \perp AO$.

Từ giả thiết EM // AB, suy ra ΔMEO cân tại M và tứ giác AEMK là hình chữ nhật.

Đặt $ME = MO = x$. Ta có :

$MO^2 = AO^2 - AM^2 = AO^2 - AO.AK = AO^2 - AO.ME$.

Vậy $x^2 = a^2 - ax$. Giải phương trình này ta được $x = \dfrac{1}{2}a(\sqrt{5} - 1)$.

ĐỀ 18

TRƯỜNG PTTH CHU VĂN AN VÀ TRƯỜNG PTTH HÀ NỘI – AMSTERDAM

Đề thi tuyển sinh vào lớp 10 chuyên Toán, Tin năm học 2003 – 2004

Câu 1. Cho hai số tự nhiên a và b, Chứng minh rằng nếu $a^2 + b^2$ chia hết cho 3 thì a và b cũng chia hết cho 3.

Câu 2. Cho phương trình : $\left(\dfrac{1}{x}\right)^2 + \left(\dfrac{1}{x+1}\right)^2 = m$.

1. Giải phương trình với m = 15.
2. Tìm m để phương trình có 4 nghiệm phân biệt.

Câu 3. Cho x, y là các số nguyên dương thỏa mãn : $x + y = 2003$.

Tìm giá trị nhỏ nhất, lớn nhất của biểu thức $P = x(x^2 + y) + y(y^2 + x)$.

Câu 4. Cho đường tròn (O) với dây BC cố định (BC < 2R) và điểm A trên cung lớn BC (A không trùng với B, C và điểm chính giữa của cung). Gọi H là hình chiếu của A trên BC, E và F lần lượt là hình chiếu của B và C trên đường kính AA'.

1. Chứng minh rằng HE vuông góc với AC.
2. Chứng minh tam giác HEF đồng dạng với tam giác ABC.
3. Khi A di chuyển, chứng minh tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác HEF cố định.

Câu 5. Lấy 4 điểm ở miền trong một tứ giác để cùng với 4 đỉnh ta được 8 điểm, trong đó không có 3 điểm nào thẳng hàng. Biết diện tích của tứ giác là 1, chứng minh rằng tồn tại một tam giác có 3 đỉnh lấy từ 8 điểm đã cho có diện tích không vượt quá $\frac{1}{10}$. Tổng quát hóa bài toán cho n giác lồi với n điểm nằm ở miền trong của đa giác đó.

BÀI GIẢI

Câu 1. Đặt $a = 3k + r$ với $r = 0, 1, 2$ thì ta thấy a^2 chia hết cho 3 dư 0 hoặc dư 1. Tương tự b^2 cũng chia hết cho 3 dư 0 hoặc dư 1.

Từ đó $(a^2 + b^2)$ chia hết cho 3 $\Rightarrow$ a^2 và b^2 đều chia hết cho 3.

Suy ra a và b cũng chia hết cho 3.

Câu 2.

1. Điều kiện : $x \neq 0$ và $x \neq 1$.

Với m = 15. Phương trình có dạng : $\left(\frac{1}{x}\right)^2 + \left(\frac{1}{x+1}\right)^2 = 15$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{(x+1)^2 + x^2}{x^2(x+1)^2} - 15 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{1}{x^2(x+1)^2} + \frac{2x^2 + 2x}{x^2(x+1)^2} - 15 = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad \left[\frac{1}{x(x+1)}\right]^2 + \frac{2}{x(x+1)} - 15 = 0 \quad (*) \qquad \text{Đặt } y = \frac{1}{x(x+1)} \ (**)$$

Phương trình (*) trở thành : $y^2 + 2y - 15 = 0 \quad \Rightarrow \quad y = 3,\ y = -5$.

Thế vào (**) giải ra ta được phương trình có 4 nghiệm :

$$x = \frac{-3 \pm \sqrt{21}}{6}, \qquad x = \frac{-5 \pm \sqrt{5}}{10}.$$

2. $\left(\frac{1}{x}\right)^2 + \left(\frac{1}{x+1}\right)^2 = m$ có 4 nghiệm $\Leftrightarrow$ $y^2 + 2y - m = 0$ có 2 nghiệm phân biệt thỏa mãn $\left[\begin{array}{l} y > 0 \\ y < -4 \end{array}\right.$ (do (**)).

Theo định lí Viet : $y_1 + y_2 = -2$

$\Rightarrow$ Phương trình $y^2 + 2y - m = 0$ có : $\begin{cases} y_1 < -4 \\ y_2 > 0 \end{cases}$

Giải hệ $\begin{cases} -1 - \sqrt{1+m} < -4 \\ -1 + \sqrt{1+m} > 0 \end{cases}$ ta được m > 8.

Thử lại với m > 8 đúng. Vậy m > 8 là giá trị cần tìm.

Câu 3. Ta có : $P = (x+y)^3 - 3xy(x+y) + 2xy = 2003^3 - 6007xy$.

Vì $(x - y)^2 = (x + y)^2 - 4xy = 2003^2 - 4xy$ nên xy tăng (giảm) khi $|x - y|$ giảm (tăng).

Theo giả thiết x, y là số nguyên dương, ta nhận thấy :

- Giá trị nhỏ nhất của P là $2003^3 - 6007.1001.1002$ đạt được khi (x; y) bằng (1001; 1002) hoặc (1002; 1001).
- Giá trị lớn nhất của P là $2003^3 - 6007.1.2002$ đạt được khi (x; y) bằng (1; 2002) hoặc (2002; 1).

Câu 4. *(Hình 30)*

1. Do tứ giác ABHE nội tiếp nên $\widehat{EHC} = \widehat{BAA'}$,

mà $\widehat{BAA'} = \widehat{BCA'} \Rightarrow \widehat{EHC} = \widehat{HCA'}$.

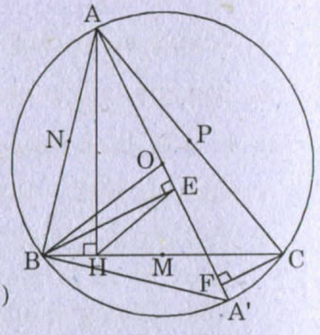
Do đó HE // CA', mặt khác $A'C \perp AC$

$\Rightarrow$ $HE \perp AC$.

2. Tứ giác AHFC nội tiếp suy ra $\widehat{EFH} = \widehat{ACB}$ (1)

Tứ giác ABHE nội tiếp suy ra $\widehat{HEF} = \widehat{ABC}$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra $\Delta HEF \backsim \Delta ABC$.



Hình 30

3. Gọi M, N, P lần lượt là trung điểm của BC, AB, CA.

Vì MN // AC, $HE \perp AC$ nên $MN \perp HE$, mà N cách đều bốn điểm A, B, H, E suy ra MN là đường trung trực của đoạn HE. Chứng minh tương tự MP là đường trung trực của HF. Vậy M là tâm đường tròn ngoại tiếp $\Delta HEF \Rightarrow$ đpcm.

Câu 5. Nối các điểm tạo thành các tam giác đôi một chỉ chung nhiều nhất một cạnh, phủ vừa kín tứ giác. Tổng các góc trong của tam giác bằng tổng các góc trong của tứ giác cộng với 4 lần 360^0 nên bằng

$$360^0 + 4.360^0 = 10.180^0.$$

Vậy có 10 tam giác mà tổng diện tích là 1 nên tồn tại tam giác có diện tích không vượt quá $\frac{1}{10}$.

Tổng quát : Ở miền trong đa giác lồi n – cạnh ($n \geq 3$) có diện tích bằng 1 lấy n điểm, trong đó không có 3 điểm nào thẳng hàng. Khi đó tồn tại một tam giác có 3 đỉnh lấy từ 2n đỉnh đã cho có diện tích không vượt quá $\dfrac{1}{3n-2}$.

ĐỀ 19

ĐẠI HỌC QUỐC GIA HÀ NỘI – TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC TỰ NHIÊN

Đề thi tuyển sinh vào lớp 10 chuyên Toán, Tin năm học 2005 – 2006

Câu 1. Giải phương trình : $\sqrt{2-x} + \sqrt{2+x} + \sqrt{4-x^2} = 2$.

Câu 2. Giải hệ phương trình : $\begin{cases} x^3 + y^3 - xy^2 = 1 \\ 4x^4 + y^4 = 4x + y \end{cases}$

Câu 3. Giả sử x, y là những số không âm thay đổi thỏa mãn điều kiện $x^2 + y^2 = 1$.

1. Chứng minh rằng $1 \leq x + y \leq \sqrt{2}$.
2. Tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của biểu thức $P = \sqrt{1+2x} + \sqrt{1+2y}$.

Câu 4. Cho hình vuông ABCD và điểm P nằm trong tam giác ABC.

1. Giả sử $\widehat{BPC} = 135^0$. Chứng minh rằng $2PB^2 + PC^2 = PA^2$.
2. Các đường thẳng AP và CP cắt các cạnh BC và BA tương ứng tại các điểm M và N. Gọi Q là điểm đối xứng với B qua trung điểm của đoạn MN. Chứng minh rằng khi P thay đổi trong tam giác ABC, đường thẳng PQ luôn đi qua D.

Câu 5.

1. Cho đa giác đều (H) có 14 đỉnh. Chứng minh rằng trong 6 đỉnh bất kì của (H) luôn có 4 đỉnh là các đỉnh của một hình thang.
2. Có bao nhiêu phân số tối giản $\dfrac{m}{n}$ lớn hơn 1 (m, n là các số nguyên dương) thỏa mãn mn = 13860.

BÀI GIẢI

Câu 1. Điều kiện : $\begin{cases} 2 - x \geq 0 \\ 2 + x \geq 0 \\ 4 - x^2 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow -2 \leq x \leq 2.$

Đặt $t = \sqrt{2-x} + \sqrt{2+x}$ ($t \geq 0$) $\Rightarrow$ $\sqrt{4-x^2} = \dfrac{t^2-4}{2}$.

Phương trình được viết lại : $t^2 + 2t - 8 = 0 \Rightarrow t_1 = -4$ (loại), $t_2 = 2$.

Với $t_2 = 2 \Rightarrow \sqrt{2-x} + \sqrt{2+x} = 2 \Leftrightarrow x = \pm 2$.

Thử lại ta thấy $x = -2$ và $x = 2$ là hai nghiệm của phương trình.

Vậy phương trình đã cho có hai nghiệm $x = -2$ và $x = 2$.

Câu 2. $\begin{cases} x^3 + y^3 - xy^2 = 1 & (1) \\ 4x^4 + y^4 = 4x + y & (2) \end{cases}$

(2) có dạng : $4x^4 + y^4 = (4x + y)(x^3 + y^3 - xy^2)$ (vì $x^3 + y^3 - xy^2 = 1$)

$$\Leftrightarrow xy(3y^2 - 4xy + x^2) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ y = 0 \\ 3y^2 - 4xy + x^2 = 0 \quad (*) \end{array}\right.$$

- Với $x = 0 \Rightarrow y = 1$
- Với $y = 0 \Rightarrow x = 1$
- Giải (*) : Với $x \neq 0$ chia hai vế (*) cho x^2 ta được : $3\left(\dfrac{y}{x}\right)^2 - 4\left(\dfrac{y}{x}\right) + 1 = 0$

Đặt $t = \dfrac{y}{x}$. Ta có : $3t^2 - 4t + 1 = 0 \Rightarrow t_1 = 1, t_2 = \dfrac{1}{3}$.

- $t_1 = 1 \Rightarrow \dfrac{y}{x} = 1 \Leftrightarrow x = y$ thay vào (1) ta tìm được $x = y = 1$.
- $t_2 = \dfrac{1}{3} \Rightarrow \dfrac{y}{x} = \dfrac{1}{3} \Leftrightarrow x = 3y$ thay vào (1) ta tìm được $x = \dfrac{3}{\sqrt[3]{25}}, y = \dfrac{1}{\sqrt[3]{25}}$.

Câu 3.

1. Ta có : $(x + y)^2 \leq 2(x^2 + y^2) = 2$

Suy ra $x + y \leq \sqrt{2}$ (1) Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow x = y = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$.

Mặt khác $(x + y)^2 = x^2 + y^2 + 2xy = 1 + 2xy \geq 1$ (vì $x^2 + y^2 = 1$).

Suy ra $x + y \geq 1$ (2) Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow x = 0$ hoặc $y = 0$.

Từ (1) và (2) $\Rightarrow 1 \leq x + y \leq \sqrt{2}$ (đpcm).

2. $P = \sqrt{1+2x} + \sqrt{1+2y} \Rightarrow P^2 = 2 + 2(x+y) + 2\sqrt{1 + 2(x+y) + 4xy}$

Do $x + y \leq \sqrt{2}$ và $4xy \leq 2(x^2 + y^2) = 2$.

Suy ra $P \leq \sqrt{2 + 2\sqrt{2} + 2\sqrt{3 + 2\sqrt{2}}}$

Vậy giá trị lớn nhất của P là $\sqrt{2 + 2\sqrt{2} + 2\sqrt{3 + 2\sqrt{2}}}$, đạt được khi $x = y = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$.

Mặt khác, do x + y ≥ 1 và 4xy ≥ 0, nên $P^2 \geq 2 + 2 + 2\sqrt{1 + 2 + 0}$

$$\Rightarrow \quad P \geq \sqrt{4 + 2\sqrt{3}}.$$

Vậy giá trị nhỏ nhất của P là $\sqrt{4 + 2\sqrt{3}}$, đạt được khi x = 0 hoặc y = 0.

Câu 4. *(Hình 31a, 31b, 31c)*

1. Lấy điểm P' khác phía với điểm P đối với đường thẳng AB sao cho ΔBPP' vuông cân tại B.

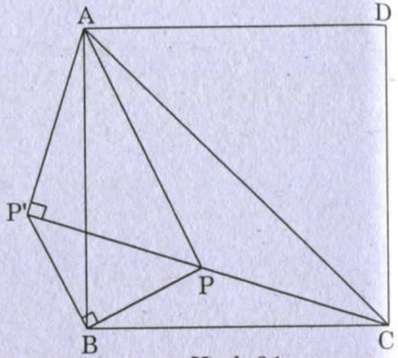
Ta có ΔBPC = ΔBP'A (c-g-c)

$\Rightarrow \widehat{BP'A} = 135^0$.

Do $\widehat{BP'P} = 45^0$ nên $\widehat{PP'A} = 90^0$.

Theo định lí Pytago :

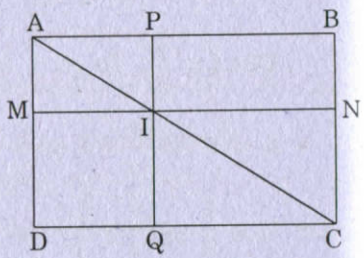
$$PA^2 = AP'^2 + PP'^2 = PC^2 + 2PB^2 \text{ (đpcm)}.$$



Hình 31a

2. Trước hết ta chứng minh nhận xét sau :

Nhận xét : Giả sử I là điểm nằm trong hình chữ nhật ABCD. Qua I vẽ các đường thẳng MN, PQ tương ứng song song với AB, AD. Gọi diện tích hình chữ nhật IPBN là S_1, diện tích hình chữ nhật IQDM là S_2. Khi đó $S_1 = S_2$ khi và chỉ khi I thuộc đường chéo AC.



Hình 31b

Thật vậy : Giả sử I thuộc đường chéo AC. Vì đường chéo của hình chữ nhật chia hình chữ nhật thành hai phần có diện tích bằng nhau nên xét các hình ABCD, APIM, INCQ ta có $S_1 = S_2$.

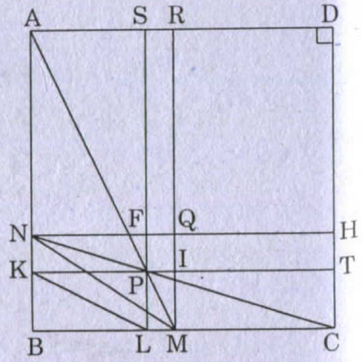
Ngược lại, giả sử $S_1 = S_2$, suy ra : IN.IP = IM.IQ $\Rightarrow \dfrac{IN}{IM} = \dfrac{IQ}{IP} = \dfrac{NC}{MA}$.

$\Rightarrow \Delta MAI \backsim \Delta NIC \quad \Rightarrow \widehat{MIA} = \widehat{NIC}$.

Do M, I, N thẳng hàng nên A, I, C thẳng hàng.

Trở lại bài toán.

Dễ thấy tứ giác NBMQ là hình chữ nhật. Qua P và Q vẽ các đường thẳng song song với các cạnh của hình vuông. Do P thuộc đường chéo AM của hình chữ nhật ABMR nên $S_{BLPK} = S_{PIRS}$.



Hình 31c

P thuộc đường chéo CN của hình chữ nhật NBCH nên $S_{BLPK} = S_{PTHF}$.

Vậy $S_{PIRS} = S_{PTHF} \quad \Rightarrow \quad S_{FQRS} = S_{QITH}$.

Theo chứng minh trên, suy ra Q thuộc đường chéo PD của hình chữ nhật SPTD. Vậy PQ đi qua điểm D.

Câu 5.

1. Các đỉnh của (H) chia đường tròn ngoại tiếp nó thành 14 cung bằng nhau, mỗi cung có số đo là $\alpha = \dfrac{\pi}{7}$. Các dây nối hai đỉnh của (H) chắn các cung nhỏ có số đo là α, 2α, 3α, ..., 7α. Do vậy độ dài các dây đó chỉ nhận 7 giá trị khác nhau.

Lấy 6 đỉnh của (H) thì số dây nối hai đỉnh trong 6 đỉnh là $\left(\dfrac{6 \times 5}{2}\right) = 15$:

Vì 15 dây này có độ dài nhận không quá 7 giá trị khác nhau nên phải có ba dây cùng độ dài. Trong ba dây đó luôn có hai dây không chung đầu mút (vì nếu hai dây bất kì trong ba dây đó đều chung đều chung đầu mút thì ba dây bao nhiêu đó tạo thành một tam giác đều, do đó số đỉnh của (H) chia hết cho 3, trái với giả thiết).

Dễ thấy hai dây bằng nhau của một đường tròn không chung đầu mút thực hiện 4 đầu mút của chúng là 4 điểm của một hình thang (cân). Từ đó suy ra trong 6 đỉnh bất kì của (H) luôn có 4 đỉnh là các đỉnh của một hình thang.

2. Ta có : 13860 = 2.2.3.3.5.6.11.

Vì m.n = 13680 nên m phải là ước số của 13680 tức là tích số của một số nhân tử trong 7 nhân tử trên, còn n là tích của các nhân tử còn lại.

Nếu m có chứa nhân tử 2 (hoặc 3) thì nó phải chứa 2^2 (hoặc 3^2) vì ngược lại thì $\dfrac{m}{n}$ không tối giản.

Do đó nếu kí hiệu $a_1 = 2^2$, $a_2 = 3^2$, $a_3 = 5$, $a_4 = 7$, $a_5 = 11$ thì m là tích của một số nhân tử trong các số a_1, a_2, a_3, a_4, a_5 còn n là tích các nhân tử còn lại. Vậy ta có các trường hợp sau :

1. Có 1 phân số có tử số là 1 (mẫu số là 13680).
2. Có 5 phân số có tử số là một trong năm số $a_1, a_2, ..., a_5$ (mẫu là tích của 4 nhân tử còn lại).
3. Có 10 phân số có tử số là tích của hai nhân tử trong năm số a_1, a_2, ..., a_5, (mẫu số là tích của 3 nhân tử còn lại).
4. Có 10 phân số có tử số là tích của ba nhân tử trong năm số trên (mẫu là tích của hai nhân tử còn lại).

5. Có 5 phân số có tử số là tích của bốn nhân tử trong năm số trên còn mẫu là số còn lại.

6. Có 1 phân số có tử số là tích của cả năm số trên (mẫu số là 1).

Vậy số phân số tối giản $\frac{m}{n}$ thỏa mãn m.n = 13680 là :

$$1 + 5 + 10 + 10 + 5 + 1 = 32.$$

Các phân số trên được chia thành từng cặp nghịch đảo của nhau và khác 1 nên số phân số lớn hơn 1 là $\frac{32}{2} = 16$.

ĐỀ 20

ĐẠI HỌC QUỐC GIA HÀ NỘI – TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC TỰ NHIÊN

Đề thi tuyển sinh vào lớp 10 chuyên Khoa học Tự nhiên năm 2005 – 2006

Câu 1. Giải hệ phương trình : $\begin{cases} x + y + xy = 3 \\ x^2 + y^2 = 2 \end{cases}$.

Câu 2. Giải phương trình : $x + 4\sqrt{x + 3} + 2\sqrt{3 - 2x} = 11$.

Câu 3. Tìm nghiệm nguyên của phương trình :

$$x^2 + 17y^2 + 34xy + 51(x + y) = 1740.$$

Câu 4. Cho hai đường tròn (O), (O') nằm ngoài nhau có tâm tương ứng là O và O'. Một tiếp tuyến chung ngoài của hai đường tròn tiếp xúc với (O) tại A và (O') tại B. Một tiếp tuyến chung trong của hai đường tròn cắt AB tại I, tiếp xúc với (O) tại C và (O') tại D. Biết rằng C nằm giữa I và D.

1. Hai đường thẳng OC, O'B cắt nhau tại M. Chứng minh rằng OM > O'M.
2. Kí hiệu (S) là đường tròn đi qua A, C, B và (S') là đường tròn đi qua A, D, B. Đường thẳng CD cắt (S) tại E khác C và cắt (S') tại F khác D. Chứng minh rằng AF vuông góc BE.

Câu 5. Giả sử x, y, z là các số dương thay đổi và thỏa mãn điều kiện :

$$xy^2z^2 + x^2z + y = 3z^2.$$

Hãy tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $P = \frac{z^4}{1 + z^4(x^4 + y^4)}$.

BÀI GIẢI

Câu 1. Đặt S = x + y ; P = x.y.

Hệ đã cho có dạng : $\begin{cases} S + P = 3 & (1) \\ S^2 - 2P = 2 & (2) \end{cases}$

Từ (1) $\Rightarrow$ $P = 3 - S$ (3)

Thay (3) vào (2) ta được : $S^2 - 2(3 - S) = 2 \Leftrightarrow S^2 + 2S - 8 = 0$

$\Rightarrow S = 2$ hoặc $S = -4$.

Với $S = 2 \Rightarrow P = 1$.

Với $S = -4 \Rightarrow P = 7$.

Hệ trên có nghiệm là : $\begin{cases} S = 2 \\ P = 1 \end{cases}$ hoặc $\begin{cases} S = -4 \\ P = 7 \end{cases}$.

Với $\begin{cases} S = 2 \\ P = 1 \end{cases} \Rightarrow x = y = 1$.

Với $\begin{cases} S = -4 \\ P = 7 \end{cases} \Rightarrow$ không tồn tại x, y.

Vậy nghiệm của hệ đã cho là (x; y) = (1; 1).

Câu 2. Điều kiện : $-3 \le x \le \frac{3}{2}$.

Phương trình đã cho tương đương với :

$$11 - x - 4\sqrt{x + 3} - 2\sqrt{3 - 2x} = 0$$

$$\Leftrightarrow (x + 3 - 4\sqrt{x + 3} + 4) + (3 - 2x - 2\sqrt{3 - 2x} + 1) = 0$$

$$\Leftrightarrow (\sqrt{x + 3} - 2)^2 + (\sqrt{3 - 2x} - 1)^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{x + 3} - 2 = 0 \\ \sqrt{3 - 2x} - 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{x + 3} = 2 \\ \sqrt{3 - 2x} = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = 1 \end{cases}$$

$\Leftrightarrow$ x = 1 (thỏa điều kiện).

Vậy phương trình có nghiệm là x = 1.

Câu 3. Phương trình đã cho có dạng : $x^2 + 17[y^2 + 2xy + 3(x + y)] = 1740$.

Nhận xét rằng với số x nguyên, x có thể có dạng sau :

$$x = 17k \pm r \text{ với } r \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\} \text{ và } k \in \mathbb{Z}.$$

Suy ra : $x^2 \in \{17k, 17k + 1, 17k + 4, 17k + 9, 17k + 8, 17k + 16,$
$17k + 2, 17k + 5, 17k + 13\}$.

Nhận thấy rằng vế phải là 1740 khi chia cho 17 có số dư là 6. Trong khi đó vế trái khi chia cho 17 trong mọi trường hợp đều không có số dư là 6. Vậy phương trình đã cho không có nghiệm nguyên.

Câu 4. *(Hình 32)*

1. Ta có OM // O'D (OM và O'D cùng vuông góc với CD)

$\Rightarrow \widehat{MOO'} = \widehat{OO'D} < \widehat{IO'D} = \widehat{IO'M} < \widehat{OO'M}$

$\Rightarrow OM > O'M$

2. Tứ giác ACBE nội tiếp và $IA = IC$,

nên $IB = IE$.

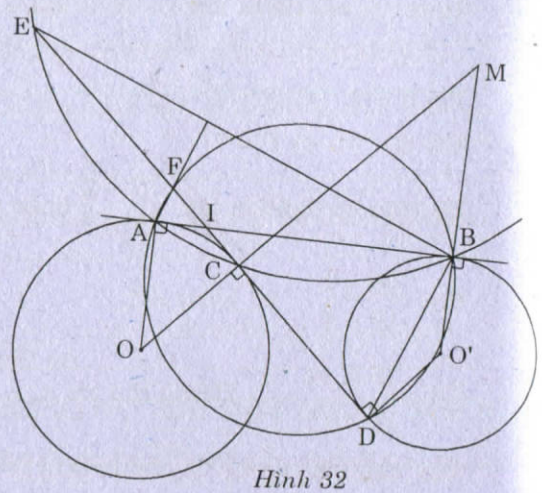
Mặt khác $IB = ID$, do đó ΔBED vuông tại B hay $BD \perp BE$ (1)

Tứ giác ADBF nội tiếp và $IB = ID$,

nên $IA = IF$.

Suy ra $AF // BD$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra $AF \perp BE$.



Hình 32

Câu 5.

Từ điều kiện : $xy^2z^2 + x^2z + y = 3z^2$

$$\Leftrightarrow \quad xy^2 + x^2\frac{1}{z} + y\frac{1}{z^2} = 3 \quad \text{(z là số dương)}$$

Biểu thức P có dạng : $P = \dfrac{1}{\dfrac{1}{z^4} + x^4 + y^4}$

Đặt $t = \dfrac{1}{z}$. Điều kiện được viết lại : $xy^2 + yt^2 + tx^2 = 3$

Biểu thức P được viết lại : $P = \dfrac{1}{x^4 + y^4 + t^4}$

Áp dụng bất đẳng thức Côsi cho bốn số dương, ta có :

$$\begin{cases} x^4 + y^4 + y^4 + 1 \geq 4xy^2 \\ y^4 + t^4 + t^4 + 1 \geq 4yt^2 \\ t^4 + x^4 + x^4 + 1 \geq 4tx^2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \quad 3(x^4 + y^4 + t^4) + 3 \geq 4(xy^2 + yt^2 + tx^2) = 4.3 = 12$$

$$\Rightarrow \quad x^4 + y^4 + t^4 \geq 3 \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{x^4 + y^4 + t^4} \leq \frac{1}{3}.$$

Vậy giá trị lớn nhất của P là $\dfrac{1}{3}$ đạt được khi $x = y = z = 1$.

ĐỀ 21

ĐẠI HỌC QUỐC GIA HÀ NỘI – TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC TỰ NHIÊN

Đề thi tuyển sinh lớp 10 chuyên Toán, Tin năm học 2004 – 2005

Câu 1. Giải phương trình : $\sqrt{x+3} + \sqrt{x-1} = 2$.

Câu 2. Giải hệ phương trình : $\begin{cases} (x+y)(x^2+y^2) = 15 \\ (x-y)(x^2-y^2) = 3 \end{cases}$

Câu 3. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức : $P = \dfrac{(x^3+y^3)-(x^2+y^2)}{(x-1)(y-1)}$

trong đó x, y là những số thực lớn hơn 1.

Câu 4. Cho hình vuông ABCD và điểm M nằm trong hình vuông.

1. Tìm tất cả các vị trí của điểm M sao cho $\widehat{MAB} = \widehat{MBC} = \widehat{MCD} = \widehat{MDA}$.
2. Xét điểm M nằm trên đường chéo AC. Gọi N là chân đường vuông góc hạ từ M xuống cạnh AB và O là trung điểm của đoạn AM. Chứng minh rằng tỉ số $\dfrac{OB}{CN}$ có giá trị không đổi khi M di chuyển trên đường chéo AC.
3. Với giả thiết M nằm trên đường chéo AC, xét các đường tròn (S_1) và (S_2) có đường kính tương ứng là AM và CN. Hai tiếp tuyến chung của (S_1) và (S_2) tiếp xúc với (S_2) tại P và Q. Chứng minh đường thẳng PQ tiếp xúc với (S_1).

Câu 5. Với số thực a, ta định nghĩa phần nguyên của số a là số nguyên lớn nhất không vượt quá a và kí hiệu là $[a]$. Dãy các số $x_0, x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$ được xác định bởi công thức $x_n = \left[\dfrac{n+1}{\sqrt{2}}\right] - \left[\dfrac{n}{\sqrt{2}}\right]$. Hỏi trong 200 số $\{x_0, x_1, \ldots, x_{199}\}$ có bao nhiêu số khác 0 ? (cho biết $1,41 < \sqrt{2} < 1,42$).

BÀI GIẢI

Câu 1. Điều kiện : $\begin{cases} x + 3 \geq 0 \\ x - 1 \geq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \quad x \geq 1 \quad (*)$

$$\sqrt{x+3} + \sqrt{x-1} = 2 \quad \Leftrightarrow \quad 2x + 2 + 2\sqrt{x^2 + 2x - 3} = 4$$

$\Leftrightarrow \quad \sqrt{x^2 + 2x - 3} = 1 - x \quad \Leftrightarrow \quad x \leq 1.$ Kết hợp với (*) được $x = 1$.

Thay vào phương trình ban đầu ta thấy đúng.

Vậy nghiệm của phương trình là $x = 1$.

Câu 2. Hệ đã cho tương đương với hệ : $\begin{cases}(x+y)(2x^2+2y^2)=30 & (1)\\ (x+y)(x^2+y^2-2xy)=3 & (2)\end{cases}$

Trừ (1) cho (2) vế theo vế ta được : $(x+y)^3 = 27 \quad \Rightarrow \quad x+y=3.$

Ta nhận được hệ tương đương : $\begin{cases}x+y=3\\ x^2+y^2=5\end{cases}$

Hệ có hai nghiệm (x; y) là (1; 2) và (2; 1).

Câu 3. Áp dụng bất đẳng thức Côsi cho các số dương ta có :

$$P = \frac{(x^3+y^3)-(x^2+y^2)}{(x-1)(y-1)} = \frac{x^2(x-1)+y^2(y-1)}{(x-1)(y-1)} = \frac{x^2}{y-1}+\frac{y^2}{x-1}$$

$$\geq \frac{2xy}{\sqrt{(x-1)(y-1)}} \geq 2\frac{x}{\left(\dfrac{x-1+1}{2}\right)}\cdot\frac{y}{\left(\dfrac{y-1+1}{2}\right)} = 8\,.$$

Vậy giá trị nhỏ nhất của P là 8 đạt được khi x = y = 2.

Câu 4. *(Hình 33a, 33b)*

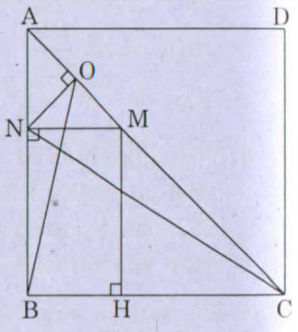
1. Từ giả thiết $\widehat{MAB} = \widehat{MBC}$.

Suy ra $\widehat{MAB} + \widehat{MBA} = 90^0$ hay $MA \perp MB$.

Tương tự ta có :

$MB \perp MC, \qquad MC \perp MD, \qquad MD \perp MA.$

Do đó M là tâm hình vuông ABCD.



Hình 33a

2. Kẻ $MH \perp BC$, khi đó MH = NB

và $\dfrac{ON}{MN} = \dfrac{1}{\sqrt{2}} = \dfrac{MH}{MC} = \dfrac{NB}{MC}$

Mặt khác $\widehat{ONB} = \widehat{MNC} = 135^0$ nên $\Delta ONB \backsim \Delta NMC$.

Suy ra : $\dfrac{OB}{NC} = \dfrac{ON}{MN} = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$ (không đổi).

3. Gọi P' là tiếp điểm thuộc đường tròn (S_1); O' là trung điểm của CN và T là giao điểm của đoạn OO' với (S_1).

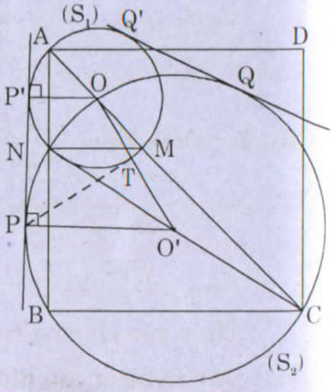
Ta có : $\widehat{O'OP} = \widehat{O'PO}$.

Do đó $O'P \,//\, OP'$ nên $\widehat{P'OP} = \widehat{O'PO}$

Suy ra $\widehat{POP'} = \widehat{POO'}$.

Vì $\Delta POP' = \Delta POT$ (c-g-c) $\Rightarrow \widehat{PTO} = \widehat{PP'O} = 90^0$

hay $PT \perp OT$.



Hình 33b

Tương tự $QT \perp OT$. Từ đó suy ra P, T, Q thẳng hàng, hay PQ tiếp xúc với (S_1) tại T.

Câu 5. Nhận xét rằng : $x_n = \left[\dfrac{n+1}{\sqrt{2}}\right]-\left[\dfrac{n}{\sqrt{2}}\right] < \dfrac{n+1}{\sqrt{2}}-\left(\dfrac{n}{\sqrt{2}}-1\right) = \dfrac{1}{\sqrt{2}}+1<2$

$$\Rightarrow \quad 0 \leq x_n \leq 1.$$

Vì $x_0, x_1, \ldots, x_{199}$ chỉ nhận một trong hai giá trị 0 hoặc 1 nên các số khác không chỉ nhận giá trị 1. Suy ra số các số khác không là :

$$\sum_{i=0}^{199} x_i = \left[\frac{1}{\sqrt{2}}\right]-\left[\frac{0}{\sqrt{2}}\right]+\left[\frac{2}{\sqrt{2}}\right]-\left[\frac{1}{\sqrt{2}}\right]+\ldots+\left[\frac{200}{\sqrt{2}}\right]-\left[\frac{199}{\sqrt{2}}\right]=\left[\frac{200}{\sqrt{2}}\right]=\left[100\sqrt{2}\right]$$

Mà $141 < 100\sqrt{2} < 142$. Vậy số các số khác không là 141.

ĐỀ 22

ĐẠI HỌC QUỐC GIA HÀ NỘI – TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC TỰ NHIÊN

Đề thi tuyển sinh vào lớp 10 chuyên Khoa học tự nhiên năm 2004 – 2005

Câu 1.

1. Giải phương trình : $|x+1| + |x-1| = 1 + |x^2-1|$.

2. Tìm nghiệm nguyên của hệ : $\begin{cases}2y^2 - x^2 - xy + 2y - 2x = 7\\ x^3 + y^3 + x - y = 8\end{cases}$

Câu 2. Cho các số thực dương a và b thỏa mãn :

$$a^{100} + b^{100} = a^{101} + b^{101} = a^{102} + b^{102}.$$

Hãy tính giá trị của biểu thức $P = a^{2004} + b^{2004}$.

Câu 3. Cho tam giác ABC có AB = 3cm, BC = 4cm, CA = 5cm. Đường cao, đường phân giác, đường trung tuyến của tam giác kẻ từ đỉnh B chia tam giác thành bốn phần. Hãy tính diện tích mỗi phần.

Câu 4. Cho tứ giác ABCD nội tiếp trong đường tròn có hai đường chéo AC và BD vuông góc với nhau tại H (H không trùng với tâm của đường tròn). Gọi M và N lần lượt là chân các đường vuông góc hạ từ H xuống các đường thẳng AB và BC, P và Q lần lượt là giao điểm của đường thẳng MH với CD và của NH với AD. Chứng minh rằng đường thẳng PQ song song với đường thẳng AC và bốn điểm M, N, P, Q nằm trên một đường tròn.

Câu 5. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức :

$$Q = \frac{1}{2}\left(\frac{x^{10}}{y^2}+\frac{y^{10}}{x^2}\right)+\frac{1}{4}(x^{16}+y^{16})-(1+x^2.y^2)^2.$$

BÀI GIẢI

Câu 1.

1. $|x+1| + |x-1| = 1 + |x^2 - 1| \quad \Leftrightarrow \quad (|x+1| - 1)(|x-1| - 1) = 0$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} |x+1| - 1 = 0 \\ |x-1| - 1 = 0 \end{array}\right. \quad \Rightarrow \quad x = 0, \quad x = \pm 2.$$

2. Hệ đã cho được viết lại dưới dạng : $\begin{cases} (x+2y+2)(x-y) = -7 & (1) \\ x^3 + y^3 + x - y = 8 & (2) \end{cases}$

Từ (1), do x, y nguyên ta có các trường hợp sau :

a) $x - y = -1 \Rightarrow x + 2y + 2 = 7 \Rightarrow x = 1$ và $y = 2$ (thỏa mãn (2)).

b) $x - y = 1 \Rightarrow x + 2y + 2 = -7 \Rightarrow x + 2y = -9 \Rightarrow$ y không nguyên.

c) $x - y = -7 \Rightarrow x + 2y + 2 = 1$. Giải hệ này được nghiệm $(x; y) = (-5; 2)$ không thỏa mãn (2).

d) $x - y = 7 \Rightarrow x + 2y + 2 = -1 \Rightarrow x + 2y = -3 \Rightarrow$ y không nguyên.

Vậy hệ đã cho có duy nhất một nghiệm nguyên $(x; y) = (1; 2)$.

Câu 2. Ta có : $a^{102} + b^{102} = (a^{101} + b^{101})(a + b) - ab(a^{100} + b^{100})$

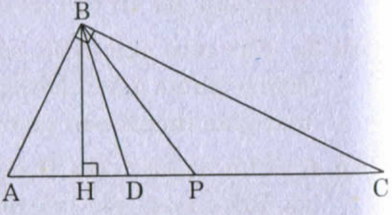
Từ giả thiết bài ra và đẳng thức trên suy ra :

$$1 = a + b - ab \quad \text{hay} \quad (a-1)(b-1) = 0 \quad \Rightarrow \quad (a; b) = (1; 1).$$

Do đó $P = 2$.

Câu 3. *(Hình 34)*

Gọi H, D, P lần lượt là chân các đường cao, phân giác, trung tuyến hạ từ B xuống cạnh AC.



Hình 34

- Vì ΔABC vuông nên dễ thấy

$S_{ABC} = 6\ (cm^2), \quad S_{ABP} = S_{CBP} = 3\ (cm^2)$.

Vì $\dfrac{S_{ABD}}{S_{CBD}} = \dfrac{DA}{DC} = \dfrac{BA}{BC} = \dfrac{3}{4}$.

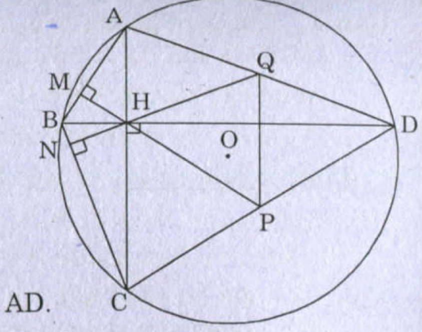
$$S_{ABC} = \frac{7}{4} S_{CBD} \Rightarrow S_{CBD} = \frac{24}{7}\ (cm^2).$$

Từ đó $\quad S_{BDP} = S_{CBD} - S_{CBP} = \dfrac{3}{7}\ (cm^2)$.

Mặt khác $\Delta ABH \backsim \Delta ACB \Rightarrow \dfrac{S_{ABH}}{S_{ACB}} = \left(\dfrac{3}{5}\right)^2$ Suy ra $\quad S_{ABH} = \dfrac{54}{25}\ (cm^2)$.

Tóm lại : $\quad S_{HBD} = S_{ABP} - S_{ABH} - S_{BDP} = \dfrac{72}{175}\ (cm^2)$.

Câu 4. *(Hình 35)*



Hình 35

Ta có $\widehat{AHQ} = \widehat{CHN} = \widehat{CBD} = \widehat{CAD}$

Nên ΔQAH cân tại $Q \Rightarrow AQ = HQ$ (1)

Mặt khác :

$$\widehat{ADB} = \widehat{ACB} = \widehat{BHN} = \widehat{QHD}$$

Nên ΔHQD cân tại $Q \Rightarrow HQ = QD$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra Q là trung điểm của AD.

Tương tự ta cũng thấy P là trung điểm của CD.

Do đó PQ // AC.

Ta thấy $\widehat{CBH} = \widehat{NMH}$ (tứ giác BMHN nội tiếp)

và $\quad \widehat{HQP} = \widehat{AHQ} = \widehat{CHN} = \widehat{CBH}$.

Suy ra $\quad \widehat{NQP} = \widehat{NMP}$ nên bốn điểm M, N, P, Q cùng nằm trên một đường tròn.

Câu 5. Áp dụng bất đẳng thức Côsi cho 4 số dương ta có :

$$\frac{1}{2}\left(\frac{x^{10}}{y^2} + \frac{y^{10}}{x^2} + 1 + 1\right) \geq 2x^2y^2; \qquad \frac{1}{4}(x^{16} + y^{16} + 1 + 1) \geq x^4y^4.$$

Suy ra $\quad \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{x^{10}}{y^2} + \dfrac{y^{10}}{x^2}\right) + \dfrac{1}{4}(x^{16} + y^{16}) + \dfrac{5}{2} \geq (1 + x^2y^2)^2$.

$$\Rightarrow \quad Q \geq -\frac{5}{2}.$$

Vậy giá trị nhỏ nhất của Q là $-\dfrac{5}{2}$ đạt được khi $x^2 = y^2 = 1$.

ĐỀ 23

ĐẠI HỌC QUỐC GIA HÀ NỘI – TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC TỰ NHIÊN

Đề thi tuyển sinh vào lớp 10 chuyên Khoa học Tự nhiên năm 2003 – 2004

Câu 1. Giải phương trình : $(\sqrt{x+5} - \sqrt{x+2})(1 + \sqrt{x^2 + 7x + 10}) = 3$.

Câu 2. Giải hệ phương trình : $\begin{cases} 2x^3 + 3x^2y = 5 \\ y^3 + 6xy^2 = 7 \end{cases}$

Câu 3. Tìm các số nguyên x, y thỏa mãn đẳng thức :

$$2y^2x + x + y + 1 = x^2 + 2y^2 + xy.$$

Câu 4. Cho nửa đường tròn (O) điều kiện AB = 2R (R là độ dài cho trước). M, N là hai điểm trên nửa đường tròn (O) sao cho M thuộc cung AN và tổng các khoảng cách từ A, B đến đường thẳng MN bằng $R\sqrt{3}$.

1. Tính độ dài đoạn MN theo R.
2. Gọi giao điểm của hai dây AN và BM là I, giao điểm của các đường thẳng AM và BN là K. Chứng minh rằng bốn điểm M, N, I, K cùng nằm trên một đường tròn. Tính bán kính của đường tròn đó theo R.
3. Tìm giá trị lớn nhất của diện tích tam giác KAB theo R khi M, N thay đổi nhưng vẫn thỏa mãn giả thiết của bài toán.

Câu 5. Giả sử x, y, z là các số thực thỏa mãn điều kiện :

$x + y + z + xy + yz + zx = 6$. Chứng minh rằng $x^2 + y^2 + z^2 \geq 3$.

BÀI GIẢI

Câu 1. Điều kiện : $\begin{cases} x+5 \geq 0 \\ x+2 \geq 0 \\ x^2+7x+1 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \quad x \geq -2.$

Để ý rằng $x^2 + 7x + 10 = (x + 5)(x + 2)$. Nhân hai vế của phương trình đã cho với $(\sqrt{x+5} + \sqrt{x+2}) > 0$ ta được :

$$1 + \sqrt{x^2+7x+10} = \sqrt{x+5} + \sqrt{x+2} \quad \Leftrightarrow \quad (\sqrt{x+5} - 1)(\sqrt{x+2} - 1) = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad \left[\begin{array}{l} \sqrt{x+5} = 1 \\ \sqrt{x+2} = 1 \end{array}\right. \quad \Leftrightarrow \quad \left[\begin{array}{l} x = -4 \text{ (loại)} \\ x = -1. \end{array}\right.$$

Vậy nghiệm của phương trình là x = –1.

Câu 2. $\begin{cases} 2x^3 + 3x^2y = 5 \\ y^3 + 6xy^2 = 7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 8x^3 + 12x^2y = 20 \\ y^3 + 6xy^2 = 7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (2x+y)^3 = 27 \\ y^3 + 6xy^2 = 7 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \quad \begin{cases} 2x + y = 3 & (1) \\ 2y^3 - 9y^2 + 7 = 0 & (2) \end{cases}$$

$(2) \Rightarrow \quad y = 1, \quad y = \dfrac{7 \pm \sqrt{105}}{4}$. Thế vào (1) ta được hệ có 3 nghiệm :

$$(1; 1), \left(\frac{5+\sqrt{105}}{8}; \frac{7-\sqrt{105}}{4}\right), \left(\frac{5-\sqrt{105}}{8}; \frac{7+\sqrt{105}}{4}\right).$$

Câu 3. Ta có : $2y^2x + x + y + 1 = x^2 + 2y^2 + xy$

$$\Leftrightarrow \quad 2y^2(x - 1) - x(x - 1) - y(x - 1) + 1 = 0 \qquad (1)$$

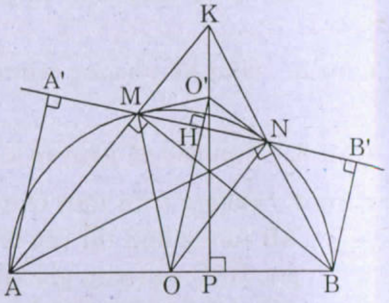
Nhận xét rằng x = 1 không là nghiệm của (1). Chia 2 vế (1) cho (x – 1) ta được : $2y^2 - x - y + \dfrac{1}{x-1} = 0 \qquad (2)$

Phương trình có nghiệm x, y nguyên, suy ra $\dfrac{1}{x-1}$ nguyên nên $x - 1 \in \{1; -1\} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x = 2 \\ x = 0 \end{array}\right.$

Thay x = 2 và x = 0 vào phương trình (2) và chú ý đến điều kiện y nguyên ta được y = 1.

Vậy phương trình đã cho có hai nghiệm (2; 1) và (0; 1).

Câu 4. *(Hình 36)*



Hình 36

1. Dựng AA' và BB' vuông góc với MN.

Gọi H là trung điểm của MN, lúc đó thì OH ⊥ MN. Trong hình thang AA'BB' có :

$$OH = \frac{1}{2}(AA' + BB') = \frac{R\sqrt{3}}{2}$$

$$\Rightarrow \quad MH = \frac{R}{2} \quad \Rightarrow \quad MN = R \text{ và } \Delta OMN \text{ đều.}$$

2. Dễ thấy các điểm M, N, I, K cùng nằm trên đường tròn đường kính IK.

$$\widehat{AKN} = \frac{1}{2}(\text{sđ}\overset{\frown}{AB} - \text{sđ}\overset{\frown}{MN}) = 60^0.$$

Gọi O' là trung điểm của IK $\Rightarrow \widehat{MO'N} = 2\widehat{MKN} = 120^0$

$$\Rightarrow \quad MN = MO'.\sqrt{3} \quad \text{ hay } \quad MO' = \frac{MN.\sqrt{3}}{3} = \frac{R\sqrt{3}}{3}.$$

Do đó bán kính đường tròn qua M, N, I, K là $\dfrac{R\sqrt{3}}{3}$.

3. Điểm K nằm trên cung chứa góc 60^0 dựng trên đoạn AB = 2R nên S_{KAB} lớn nhất ⇔ đường cao KP lớn nhất ⇔ ΔKAB đều, lúc đó

$$S_{KAB} = \frac{AB^2\sqrt{3}}{4} = R^2\sqrt{3}.$$

Câu 5. Ta có : $x^2 + 1 \geq 2x; \quad y^2 + 1 \geq 2y; \quad z^2 + 1 \geq 2z;$

$$2(x^2 + y^2 + z^2) \geq 2(xy + yz + zx).$$

Cộng các bất đẳng thức trên vế theo vế ta được :

$$3(x^2 + y^2 + z^2) + 3 \geq 2(x + y + z + xy + yz + zx).$$

$$\Leftrightarrow \quad 3(x^2 + y^2 + z^2) + 3 \geq 2.6 \quad \Leftrightarrow \quad x^2 + y^2 + z^2 \geq 3 \quad \text{(đpcm).}$$

Dấu "=" xảy ra ⇔ x = y = z = 1.

ĐỀ 24

ĐẠI HỌC QUỐC GIA HÀ NỘI – TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC TỰ NHIÊN

Đề thi tuyển sinh vào lớp 10 chuyên Toán, Tin năm học 2003 – 2004

Câu 1. Cho phương trình : $x^4 + 2mx^2 + 4 = 0$.

Tìm giá trị của tham số m để phương trình có 4 nghiệm phân biệt x_1, x_2, x_3, x_4 thỏa mãn $x_1^4 + x_2^4 + x_3^4 + x_4^4 = 32$.

Câu 2. Giải hệ phương trình : $\begin{cases} 2x^2 + xy - y^2 - 5x + y + 2 = 0 \\ x^2 + y^2 + x + y - 4 = 0 \end{cases}$

Câu 3. Tìm các số nguyên x, y thỏa mãn đẳng thức $x^2 + xy + y^2 = x^2y^2$.

Câu 4. Đường tròn tâm O nội tiếp tam giác ABC tiếp xúc với cạnh BC, CA, AB tương ứng tại các điểm D, E, F. Đường tròn tâm O' bàng tiếp trong góc BAC của tam giác ABC tiếp xúc với cạnh BC và phần kéo dài cạnh AB, AC tương ứng tại các điểm P, M, N.

1. Chứng minh rằng BP = CD.
2. Trên đường thẳng MN ta lấy các điểm I và K sao cho CK // AB, BI // AC. Chứng minh rằng các tứ giác BICE và BKCF là các hình bình hành.
3. Gọi (S) là đường tròn đi qua ba điểm I, K, P. Chứng minh rằng (S) tiếp xúc với các đường thẳng BC, BI, CK.

Câu 5. Số thực x thay đổi và thỏa mãn điều kiện $x^2 + (3 - x)^2 \geq 5$.

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = x^4 + (3 - x)^4 + 6x^2(3 - x)^2$.

BÀI GIẢI

Câu 1. $x^4 + 2mx^2 + 4 = 0$ (1) Đặt $t = x^2$ $(t \geq 0)$.

(1) có dạng : $t^2 + 2mt + 4 = 0$ (2)

(1) có 4 nghiệm phân biệt ⇔ (2) có hai nghiệm dương phân biệt t_1, t_2.

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta' = m^2 - 4 > 0 \\ t_1 + t_2 = -2m > 0 \\ t_1.t_2 = 4 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow m < -2.$$

Khi đó phương trình (1) có 4 nghiệm là :

$$x_1 = \sqrt{t_1}, \quad x_2 = -\sqrt{t_1}, \quad x_3 = \sqrt{t_2}, \quad x_4 = -\sqrt{t_2}.$$

Suy ra $x_1^4 + x_2^4 + x_3^4 + x_4^4 = 2(t_1 + t_2)^2 - 4t_1t_2 = 8m^2 - 16$.

Từ giả thiết có $8m^2 - 16 = 32 \Leftrightarrow m = -\sqrt{6}$.

Câu 2. $\begin{cases} 2x^2 + xy - y^2 - 5x + y + 2 = 0 \\ x^2 + y^2 + x + y - 4 = 0 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y^2 - (x+1)y - 2x^2 + 5x - 2 = 0 \\ x^2 + y^2 + x + y - 4 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (y + x - 2)(y - 2x + 1) = 0 \\ x^2 + y^2 + x + y - 4 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} \begin{cases} y + x - 2 = 0 \\ x^2 + y^2 + x + y - 4 = 0 \end{cases} & \text{(I)} \\ \begin{cases} y - 2x + 1 = 0 \\ x^2 + y^2 + x + y - 4 = 0 \end{cases} & \text{(II)} \end{array} \right.$$

Giải (I) được nghiệm (1; 1).

Giải (II) được nghiệm $\left(-\frac{4}{5}; -\frac{13}{5}\right)$.

Vậy nghiệm của hệ phương trình là : (1; 1), $\left(-\frac{4}{5}; -\frac{13}{5}\right)$.

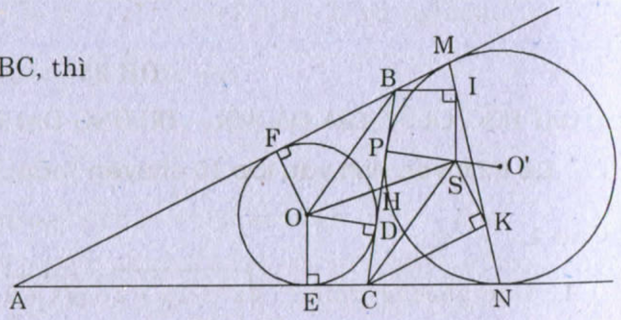
Câu 3. Với $|x| \geq 2$ và $|y| \geq 2$ ta có : $\begin{cases} x^2y^2 \geq 4x^2 \\ x^2y^2 \geq 4y^2 \end{cases}$

$\Rightarrow x^2y^2 \geq 2(x^2 + y^2) = x^2 + y^2 + x^2 + y^2 \geq x^2 + y^2 + 2|xy| > x^2 + y^2 + xy$.

Vậy $|x| \leq 2$ hoặc $|y| \leq 2$. Nếu $x = \pm 2$ hoặc $y = \pm 2$ thì phương trình đã cho không có nghiệm nguyên. Thử với x = 0, x = 1 và x = –1 ta thấy phương trình đã cho có 3 nghiệm nguyên (x; y) là (0; 0), (1; –1), (–1; 1).

Câu 4. *(Hình 37)*

1. Gọi p là nửa chu vi ΔABC, thì
   p = AB + CD
   = AC + BD
   = AM = AN
   = AB + BM.
   Suy ra BP = CD.



Hình 37

2. Ta có ΔBMI ∽ ΔAMN
   ⇒ BI = BM = BP = CD = CE.
   Do BI, CE song song và bằng nhau nên BICE là hình bình hành.
   Tương tự ta có BKCF là hình bình hành.
3. Gọi H là trung điểm của BC và S là điểm đối xứng với O qua H. Dễ thấy các cặp điểm sau đối xứng nhau qua H : (B, C); (P, D); (I, E); (F, K), do đó SI = SP = SK (vì chúng lần lượt bằng OE, SK = OF, SP = OD), $\widehat{BIS} = \widehat{CEO} = 90^0$; $\widehat{BPS} = \widehat{CDO} = 90^0$; $\widehat{CKS} = \widehat{BFO} = 90^0$.

Vậy đường tròn tâm S, bán kính SP đi qua P, I, K và tiếp xúc với BC, BI, CK.

Câu 5. Đặt $y = 3 - x$ bài toán đã cho trở thành tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = x^4 + y^4 + 6x^2y^2$, trong đó x, y là các số thực thay đổi thỏa mãn $\begin{cases} x + y = 3 \\ x^2 + y^2 \geq 5 \end{cases}$

Từ các hệ thức trên ta có : $\begin{cases} x^2 + y^2 + 2xy = 9 \\ x^2 + y^2 \geq 5 \end{cases}$

$$\Rightarrow \quad (x^2 + y^2) + 4(x^2 + y^2 + 2xy) \geq 5 + 4.9 = 41$$

$$\Rightarrow \quad 5(x^2 + y^2) + 4(2xy) \geq 41$$

Mặt khác $16(x^2 + y^2)^2 + 25(2xy)^2 \geq 40(x^2 + y^2)(2xy)$ (1)

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow \quad 4(x^2 + y^2) = 5(2xy)$

Cộng hai vế của bất đẳng thức (1) với $25(x^2 + y^2)^2 + 16(2xy)^2$ ta được :

$$41[(x^2 + y^2)^2 + (2xy)^2] \geq [5(x^2 + y^2) + 4(2xy)]^2 \geq 41^2$$

Suy ra $(x^2 + y^2)^2 + (2xy)^2 \geq 41 \quad \Leftrightarrow \quad x^4 + y^4 + 6x^2y^2 \geq 41.$

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow \begin{cases} x + y = 3 \\ x^2 + y^2 = 5 \\ 4(x^2 + y^2) = 5(2xy) \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} (x;\ y) = (1;\ 2) \\ (x;\ y) = (2;\ 1) \end{array}\right.$

Vậy giá trị nhỏ nhất của P bằng 41 đạt được khi x = 1 hoặc x = 2.

ĐỀ 25

ĐẠI HỌC QUỐC GIA HÀ NỘI – TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC TỰ NHIÊN

Đề thi tuyển sinh vào lớp 10 chuyên Toán, Tin năm học 2002 – 2003

Câu 1.

1. Giải phương trình : $\sqrt{x^2 - 3x + 2} + \sqrt{x + 3} = \sqrt{x - 2} + \sqrt{x^2 + 2x - 3}$.
2. Tìm nghiệm nguyên của phương trình : $x + xy + y = 9$.

Câu 2. Giải hệ phương trình : $\begin{cases} x^2 + y^2 + xy = 1 \\ x^3 + y^3 = x + 3y \end{cases}$

Câu 3. Cho mười số nguyên dương 1, 2, ..., 10. Sắp xếp mười số đó một cách tùy ý thành một hàng. Cộng mỗi số với số thứ tự của nó trong hàng, ta được mười tổng. Chứng minh rằng trong mười tổng đó tồn tại ít nhất hai tổng có chữ số tận cùng giống nhau.

Câu 4. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức :

$$P = \frac{4a}{b + c - a} + \frac{9b}{a + c - b} + \frac{16c}{a + b - c},$$

trong đó a, b, c là độ dài ba cạnh của một tam giác.

Câu 5. Đường tròn (C) tâm I nội tiếp tam giác ABC tiếp xúc với các cạnh BC, CA, AB tương ứng tại các điểm A', B', C'.

1. Gọi các giao điểm của đường tròn (C) với các đoạn IA, IB, IC lần lượt là M, N, P. Chứng minh rằng các đường thẳng A'M, B'N, C'P đồng quy.
2. Kéo dài đoạn AI cắt đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC tại D (khác A). Chứng minh rằng $\dfrac{IB.IC}{ID} = 2r$, trong đó r là bán kính của đường tròn (C).

BÀI GIẢI

Câu 1.

1. Điều kiện : $x \geq 2$.

$$\sqrt{x^2 - 3x + 2} + \sqrt{x + 3} = \sqrt{x - 2} + \sqrt{x^2 + 2x - 3}$$

$$\Leftrightarrow \quad \sqrt{x - 1}\sqrt{x - 2} + \sqrt{x + 3} = \sqrt{x - 2} + \sqrt{x - 1}\sqrt{x + 3}$$

$$\Leftrightarrow \quad (\sqrt{x - 1} - 1)(\sqrt{x - 2} - \sqrt{x + 3}) = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad \left[\begin{array}{l} \sqrt{x - 1} = 1 \\ \sqrt{x - 2} = \sqrt{x + 3} \end{array}\right. \quad \Leftrightarrow \quad \left[\begin{array}{l} x = 2 \\ x - 2 = x + 3 \text{ (vô nghiệm)} \end{array}\right.$$

Vậy x = 2 là nghiệm phương trình đã cho.

2. $$x + xy + y = 9 \quad \Leftrightarrow \quad (x + 1)(y + 1) = 10 \qquad (1)$$

Mặt khác : $10 = 1.10 = 2.5$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra phương trình có 8 nghiệm là :

(0; 9), (9; 0), (–2; –11), (–11; –2), (1; 4), (4; 1), (–3; –6), (–6; –3).

Câu 2. $\begin{cases} x^2 + y^2 + xy = 1 \\ x^3 + y^3 = x + 3y \end{cases}$

Do $x^2 + y^2 + xy = 1$ nên phương trình hai của hệ có dạng :

$$x^3 + y^3 = (x + 3y)(x^2 + y^2 + xy)$$

$$\Leftrightarrow \quad x^3 + y^3 = x^3 + xy^2 + x^2y + 3x^2y + 3y^3 + 3xy^2$$

$$\Leftrightarrow \quad 2y(x^2 + (x + y)^2) = 0$$

Giải ra ta được nghiệm (x; y) của hệ là (1; 0), (–1; 0).

Câu 3. Giả sử mười số đã cho viết thành một hàng là : $a_1, a_2, ..., a_{10}$

Xét mười tổng : $a_1 + 1, a_2 + 2, ..., a_{10} + 10$. Khi đó,

$$S = (a_1 + 1) + (a_2 + 2) + ... + (a_{10} + 10)$$

Giả sử rằng 10 tổng trên không có hai tổng nào có tận cùng giống nhau.

Lúc đó, tổng tất cả chữ số tận cùng của chúng là :

$$0 + 1 + 2 + 3 + ... + 9 = 45$$

Suy ra chữ số tận cùng của tổng $S = (a_1 + 1) + ... + (a_{10} + 10)$ là 5.

Mặt khác $S = (a_1 + a_2 + ... + a_{10}) + (1 + 2 + ... + 10) = 110$ có tận cùng là 0.

Vậy điều giả sử trên là sai, suy ra trong mười tổng đó tồn tại ít nhất hai tổng có chữ số tận cùng giống nhau.

Câu 4. Đặt : $b + c - a = 2x$; $c + a - b = 2y$; $a + b - c = 2z$.

Vì trong tam giác tổng hai cạnh luôn lớn hơn cạnh còn lại nên ta có :

$x, y, z > 0$ và $a = y + z$; $b = z + x$; $c = x + y$.

Áp dụng bất đẳng thức Côsi cho các số dương, ta có :

$$2P = 4\left(\frac{y+z}{x}\right) + 9\left(\frac{z+x}{y}\right) + 16\left(\frac{x+y}{z}\right)$$

$$= \left(4\frac{y}{x} + 9\frac{x}{y}\right) + \left(4\frac{z}{x} + 16\frac{x}{z}\right) + \left(9\frac{z}{y} + 16\frac{y}{z}\right) \geq 12 + 16 + 24 = 52.$$

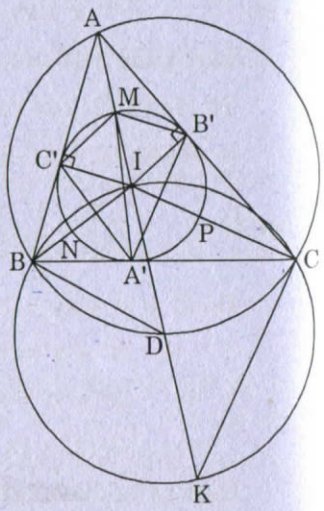
$\Rightarrow \quad P \geq 26.$

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow$ $\frac{y}{x} = \frac{3}{2}$; $\frac{z}{x} = 2$; $\frac{z}{y} = \frac{4}{3}$.

Hay $6x = 4y = 3z$.

Vậy giá trị nhỏ nhất của P là 26, đạt được khi $6x = 4y = 3z$.

Câu 5. *(Hình 38)*



Hình 38

1. Ta có $\Delta AIB' = \Delta AIC$ nên $\widehat{AIB'} = \widehat{AIC'}$.

   Suy ra $\widehat{MA'B'} = \widehat{MA'C'}$.

   Do đó A'M là phân giác trong của $\Delta A'B'C'$.

   Tương tự B'N, C'P là các đường phân giác trong của $\Delta A'B'C'$, do đó A'M, B'N, C'P đồng quy.

2. Dựng đường tròn tâm D đi qua B, I, C. Đường tròn này cắt ID kéo dài tại K.

   Dễ thấy ΔIBA đồng dạng với ΔIKC, ta có

   $$\frac{IB}{IK} = \frac{IA}{IC} \Rightarrow \frac{IB.IC}{IK} = IA.$$

   Hay $\frac{IB.IC}{IK} = 2r$ (dpcm).

ĐỀ 26

ĐẠI HỌC QUỐC GIA HÀ NỘI – TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC TỰ NHIÊN

Đề thi tuyển sinh vào lớp 10 chuyên Khoa học Tự nhiên năm 2002 – 2003

Câu 1.

a) Giải phương trình : $\sqrt{8 + \sqrt{x}} + \sqrt{5 - \sqrt{x}} = 5$

b) Giải hệ phương trình : $\begin{cases} (x + 1)(y + 1) = 8 \\ x(x + 1) + y(y + 1) + xy = 17 \end{cases}$

Câu 2. Cho a, b, c là độ dài cạnh của một tam giác. Chứng minh rằng phương trình : $x^2 + (a + b + c)x + ab + bc + ca = 0$ vô nghiệm.

Câu 3. Tìm tất cả các số nguyên n sao cho $n^2 + 2002$ là một số chính phương.

Câu 4. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức : $P = \frac{1}{1 + xy} + \frac{1}{1 + yz} + \frac{1}{1 + zx}$, trong đó x, y, z là các số dương thay đổi thỏa mãn điều kiện $x^2 + y^2 + z^2 \leq 3$.

Câu 5. Cho hình vuông ABCD, M là điểm thay đổi trên cạnh BC (M không trùng với B) và N là điểm thay đổi trên cạnh CD (N không trùng với D) sao cho : $\widehat{MAN} = \widehat{MAB} + \widehat{NAD}$.

a) BD cắt AN và AM tương ứng tại P và Q. Chứng minh rằng nằm điểm P, Q, M, C, N cùng nằm trên một đường tròn.

b) Chứng minh rằng đường thẳng MN luôn luôn tiếp xúc với một đường tròn cố định khi M và N thay đổi.

c) Kí hiệu diện tích của tam giác APQ là S_1 và diện tích của tứ giác PQMN là S_2. Chứng minh rằng tỉ số $\frac{S_1}{S_2}$ không đổi khi M và N thay đổi.

BÀI GIẢI

Câu 1.

a) Điều kiện : $0 \leq x \leq 25$. Đặt $t = \sqrt{x}$, $0 \leq t \leq 5$.

Phương trình đã cho có dạng :

$$\sqrt{8 + t} + \sqrt{5 - t} = 5 \Leftrightarrow t + 8 + 5 - t + 2\sqrt{(8 + t)(5 - t)} = 25$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{(8 + t)(5 - t)} = 6 \Leftrightarrow t^2 + 3t - 4 = 0$$

$$\Leftrightarrow t = -4 \text{ (loại) hoặc } t = 1.$$

Với $t = 1 \Rightarrow x = 1$.

Vậy x = 1 là nghiệm của phương trình đã cho.

b) $\begin{cases}(x+1)(y+1)=8\\ x(x+1)+y(y+1)+xy=17\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x+y+xy=7\\ (x+y)^2-xy+x+y=17\end{cases}$

Đặt $S = x + y,\ P = xy$.

Hệ trên trở thành : $\begin{cases}S+P=7\\ S^2+S-P=17\end{cases}$

Giải ra ta được 2 nghiệm (S; P) là (4; 3) và (–6; 13).

Với $\begin{cases}S=4\\ P=3\end{cases}$, ta có $\begin{cases}x+y=4\\ x.y=3\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x=1\\ y=3\end{cases}$ và $\begin{cases}x=3\\ y=1\end{cases}$

Với $\begin{cases}S=-6\\ P=13\end{cases}$, ta có $\begin{cases}x+y=-6\\ x.y=13\end{cases}$ (vô nghiệm).

Vậy hệ có nghiệm (x; y) là : (1; 3), (3; 1).

Câu 2. $x^2 + (a + b + c)x + ab + bc + ca = 0$

Ta có : $\Delta = (a+b+c)^2 - 4(ab+bc+ca) = a^2+b^2+c^2-2ab-2bc-2ca$

$= a(a-b-c) + b(b-c-a) + c(c-a-b)$

$= a[a-(b+c)] + b[b-(c+a)] + c[c-(a+b)] < 0$

(vì độ dài một cạnh luôn nhỏ hơn tổng hai cạnh còn lại trong tam giác).

Suy ra phương trình đã cho vô nghiệm.

Câu 3. Giả sử $n^2 + 2002 = m^2$ (m nguyên) hay $(m - n)(m + n) = 2002$ (*)

Để ý rằng m và n phải cùng chẵn hoặc cùng lẻ, ta có :

$(m - n) \vdots 2$ và $(m + n) \vdots 2$

Vế trái của (*) chia hết cho 4 nhưng vế phải không chia hết cho 4.

Vậy không có số nguyên n nào để $n^2 + 2002$ là số chính phương.

Câu 4. Chú ý rằng với a, b, c > 0, áp dụng bất đẳng thức Côsi ta có :

$$(a+b+c)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right) \ge 9.$$

Áp dụng bất đẳng thức trên với : $1 + xy = a,\quad 1 + yz = b,\ 1 + zx = c$.

Ta có : $(3 + xy + yz + zx).P \ge 9$, suy ra :

$$P \ge \frac{9}{3+xy+yz+zx} \ge \frac{9}{3+x^2+y^2+z^2} \ge \frac{3}{2}.$$

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow$ $x = y = z = 1$.

Vậy giá trị nhỏ nhất của P là $\frac{3}{2}$, đạt được khi $x = y = z = 1$.

Câu 5. *(Hình 39)*

1. Ta có : $\widehat{MAN} = \widehat{MAB} + \widehat{NAD}$ và $\widehat{BAD} = 90^0$, suy ra $\widehat{MAN} = 45^0$.

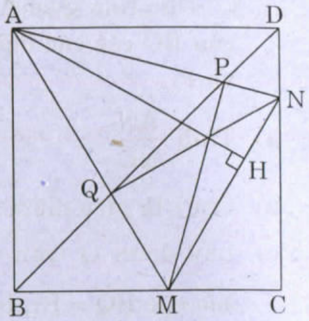
Tứ giác ABMP có $\widehat{PBM} = \widehat{PAM} = 45^0$ nên là tứ giác nội tiếp.

Suy ra $\widehat{MPA} = 90^0$ (1)

Tương tự ta có : $\widehat{NQA} = 90^0$ (2)

Mặt khác ta có : $\widehat{MCN} = 90^0$ (3)

Từ (1), (2) và (3) suy ra năm điểm P, Q, M, N, C cùng nằm trên một đường tròn đường kính MN.



Hình 39

b) Ta có : $\widehat{AMN} = \widehat{APB} = \widehat{AMB}$.

Kẻ AH ⊥ MN. Dễ thấy $\Delta AHM = \Delta ABM$.

Suy ra AH = AB.

Vậy MN luôn tiếp xúc với đường tròn tâm A bán kính AB cố định.

c) Do ΔAQN và ΔAPM vuông cân tại Q và P nên : $\frac{AQ}{AN} = \frac{AP}{AM} = \frac{1}{\sqrt{2}}$.

Suy ra $\frac{S_{APQ}}{S_{AMN}} = \frac{AQ.AP}{AM.AN} = \frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1}{2} \quad \Rightarrow \quad \frac{S_1}{S_2} = 1.$

ĐỀ 27

TRƯỜNG PHỔ THÔNG NĂNG KHIẾU, ĐHQG TP.HCM

Đề thi tuyển sinh vào lớp 10 (Ban C, D) năm học 2004 – 2005

Câu 1.

a) Tìm m để Parabol (P) : $y = x^2 + 2mx - m + 2$ tiếp xúc với đường thẳng (d) : $y = x + m$.

b) Giả sử phương trình : $mx^2 + (2m + 1)x + m^2 - 1 = 0$ có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2, hãy tính tổng S và tích P của các nghiệm, tìm một hệ thức giữa S và P độc lập với m.

Câu 2.

a) Giải hệ phương trình : $\begin{cases}x+y=-1\\ x^3+y^3=-21\end{cases}$

b) Giải phương trình : $20 - \sqrt{3-2x} = |2x - 3|$.

Câu 3.

a) Tìm k để đa thức $f(x) = x^4 - 22x^2 + 51x + 2k$ chia hết cho đa thức

$g(x) = x^2 - 3x$ (nghĩa là có đa thức h(x) sao cho f(x) = h(x). g(x)). Giải phương trình f(x) = 0 với k vừa tìm được.

b) Rút gọn biểu thức : $R = \dfrac{3a^2 - 2ab - b^2}{2a^2 + ab - b^2} : \dfrac{3a^2 - 4ab + b^2}{3a^2 + 2ab - b^2}$.

Câu 4. Cho tam giác ABC vuông ở đỉnh A và $\widehat{ABC} = 75^0$. Đường trung trực của BC cắt các đường thẳng BC, AC và AB lần lượt tại các điểm M, N và P.

a) Tính $\dfrac{AN}{NC}$.

b) Gọi I là giao điểm của các đường thẳng BN và PC. So sánh MA và MI.

c) Lấy điểm Q trên đường thẳng vuông góc với mặt phẳng (ABC) tại B sao cho BQ = BI, hạ QJ vuông góc với PC, J nằm trên PC. Tính $\dfrac{QJ}{AB}$.

Câu 5. Hai thành phố A và B cách nhau 48km, gió thổi từ A đến B với vận tốc không đổi 6 km/giờ. Lúc 8 giờ, một người đi môtô từ A đến B, nghỉ ngơi 30 phút rồi trở lại A, anh về đến A lúc 10 giờ 50 phút. Vận tốc của môtô được cộng thêm hoặc trừ bớt vận tốc của gió, tùy theo môtô chạy xuôi chiều hoặc ngược chiều gió. Hãy tính tốc độ riêng của môtô (tốc độ môtô khi tốc độ gió bằng 0).

BÀI GIẢI

Câu 1.

a) Phương trình hoành độ giao điểm của (P) và (d) là :

$$x^2 + (2m - 1)x - 2m + 2 = 0 \qquad (1)$$

(P) tiếp xúc với (d) khi và chỉ khi (1) có nghiệm kép : $\Delta = 0$.

Hay $4m^2 + 4m - 7 = 0$.

Giải phương trình trên ta được : $m = \dfrac{-1 - 2\sqrt{2}}{2}$; $m = \dfrac{-1 + 2\sqrt{2}}{2}$.

b) Theo định lí Viet, ta có : $\begin{cases} S = x_1 + x_2 = -\dfrac{(2m + 1)}{m} & (2) \\ P = x_1.x_2 = \dfrac{m^2 - 1}{m} & (3) \end{cases}$

Từ (2) ta có : $m = -\dfrac{1}{S + 2}$, thay vào (3) ta được : $P = \dfrac{S^2 + 4S + 3}{S + 2}$.

Vậy hệ thức liên hệ giữa S và P không phụ thuộc vào m là :

$$P = \frac{S^2 + 4S + 3}{S + 2}.$$

Câu 2.

a) $\begin{cases} x + y = -1 \\ x^3 + y^3 = -21 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + y = -1 \\ (x + y)[(x + y)^2 - 3xy] = -21 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + y = -1 \\ x\,.\,y = -\dfrac{20}{3} \end{cases}$

Theo định lí Viet đảo thì x và y là hai nghiệm của phương trình :

$$X^2 + X - \frac{20}{3} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad 3X^2 + 3X - 20 = 0.$$

Giải phương trình trên ta có hệ đã cho có nghiệm (x; y) là :

$$\left(\frac{-3 + \sqrt{249}}{6}; \frac{-3 - \sqrt{249}}{6}\right), \left(\frac{-3 - \sqrt{249}}{6}; \frac{-3 + \sqrt{249}}{6}\right).$$

b) Điều kiện : $3 - 2x \geq 0 \Leftrightarrow x \leq \dfrac{3}{2}$.

$$20 - \sqrt{3 - 2x} = |2x - 3| \quad \Leftrightarrow \quad 20 - \sqrt{3 - 2x} = 3 - 2x$$

$$\Leftrightarrow \quad \sqrt{3 - 2x} = 17 + 2x \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} 17 + 2x \geq 0 \\ 3 - 2x = (17 + 2x)^2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \quad \begin{cases} x \geq -\dfrac{17}{2} \\ 2x^2 + 35x + 143 = 0 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad x = -\frac{13}{2} \text{ (thỏa mãn điều kiện).}$$

Vậy $x = -\dfrac{13}{2}$ là nghiệm của phương trình đã cho.

Câu 3.

a) Thực hiện phép chia đa thức f(x) cho g(x) ta được :

$$x^4 - 22x^2 + 51x + 2k = (x^2 - 3x + 2)(x^2 + 3x - 15) + (30 + 2k)$$

Ta thấy f(x) chia hết cho g(x) $\Leftrightarrow$ $30 + 2k = 0$ $\Leftrightarrow$ $k = -15$.

Ta có $f(x) = 0 \Leftrightarrow (x^2 - 3x + 2)(x^2 + 3x - 15) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^2 - 3x + 2 = 0 \\ x^2 + 3x - 15 = 0 \end{array}\right.$

Giải hai phương trình trên ta có bốn nghiệm là :

$$x_1 = \frac{-3 - \sqrt{69}}{2}; \quad x_2 = \frac{-3 + \sqrt{69}}{2}; \quad x_3 = 1; \quad x_4 = 2.$$

b) Ta có : $R = \dfrac{3a^2 - 2ab - b^2}{2a^2 + ab - b^2} : \dfrac{3a^2 - 4ab + b^2}{3a^2 + 2ab - b^2}$

$$= \frac{3a^2 - 3ab + ab - b^2}{2a^2 - ab + 2ab - b^2} : \frac{3a^2 - 3ab - ab + b^2}{3a^2 - ab + 3ab - b^2}$$

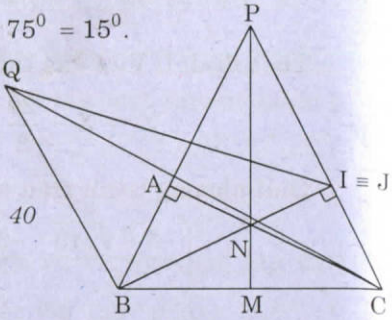
$$R = \frac{(a-b)(3a+b)}{(2a-b)(a+b)} : \frac{(a-b)(3a-b)}{(3a-b)(a+b)} = \frac{3a+b}{2a-b}.$$

Câu 4. *(Hình 40)*

a) Từ giả thiết, ta có : $\widehat{NBC} = \widehat{NCB} = 90^0 - 75^0 = 15^0$.

Suy ra $\widehat{ABN} = 60^0$, nên tam giác ABN là nửa tam giác đều.

Vậy $\dfrac{AN}{BN} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$.



Hình 40

Suy ra $\dfrac{AN}{NC} = \dfrac{AN}{BN} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$ (vì NC = BN).

b) Vì N là trực tâm tam giác PBC nên BI ⊥ PC. Do đó A, I thuộc đường tròn điều kiện BC, mà M là điểm BC, suy ra MA = MI.

c) Ta có : QP ⊥ mp(ABC), suy ra QB ⊥ PC, mà QJ ⊥ PC

nên PC ⊥ mp(QBJ).

Nên PC ⊥ BJ, suy ra I ≡ J.

Tam giác BQI vuông cân tại B suy ra $QI = BI.\sqrt{2} = AC.\sqrt{2}$.

Mà AN + NC = AC, nên $AB.\sqrt{3} + 2AB = AC$

Hay $(2+\sqrt{3})AB = AC$.

Do đó $\dfrac{QJ}{AB} = \dfrac{QI}{AB} = \dfrac{AC.\sqrt{2}}{AB} = \dfrac{\sqrt{2}(2+\sqrt{3})AB}{AB} = 2\sqrt{2} + \sqrt{6}$.

Câu 5. Gọi tốc độ riêng của môtô là x (km/giờ) (x > 6).

Vận tốc của môtô đi từ A đến B là : x + 6 (km/giờ).

Vận tốc của môtô đi từ B về A là : x − 6 (km/giờ).

Thời gian người đó đi từ A đến B, từ B về A và nghỉ ngơi tổng cộng là :

$$10 \text{ giờ } 50 \text{ phút} - (8 \text{ giờ} + 30 \text{ phút}) = 2 \text{ giờ } 20 \text{ phút} = \frac{7}{3} \text{ giờ}.$$

Thời gian người đó đi từ A đến B là : $\dfrac{48}{x+6}$ (giờ).

Thời gian người đó đi từ B về A là : $\dfrac{48}{x-6}$ (giờ).

Theo giả thiết ta có phương trình : $\dfrac{48}{x+6} + \dfrac{48}{x-6} = \dfrac{7}{3}$.

Giải phương trình trên ta được x = 42.

Vậy tốc độ của môtô là 42 (km/giờ).

ĐỀ 28

TRƯỜNG PHỔ THÔNG NĂNG KHIẾU, ĐHQG TP.HCM

Đề thi tuyển sinh lớp 10 (Ban A, B) năm học 2004 – 2005

Câu 1.

a) Giải phương trình : $x + \sqrt{4x-3} = 2$.

b) Định m để phương trình : $x^2 - (m+1)x + 2m = 0$ có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 sao cho x_1, x_2 là độ dài hai cạnh góc vuông của một tam giác vuông có cạnh huyền bằng 5.

Câu 2. Cho a, b, c là các số thực dương thỏa mãn điều kiện :

$$a^2 + b^2 + c^2 = (a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2.$$

a) Tính a + b + c biết rằng ab + bc + ca = 9.

b) Chứng minh rằng nếu c ≥ a, c ≥ b thì c ≥ a + b.

Câu 3. Cùng một thời điểm, một chiếc ôtô X_A xuất phát từ thành phố A về hướng thành phố B và một chiếc khác X_B xuất phát từ thành phố B về hướng thành phố A. Chúng chuyển động với vận tốc riêng không đổi và gặp nhau lần đầu tại một điểm cách A 20km. Cả hai chiếc xe, sau khi đến B và A tương ứng, lập tức quay trở lại và chúng gặp nhau lần thứ hai tại một điểm C. Biết thời gian xe X_B đi từ C đến B là 10 phút và thời gian giữa hai lần gặp nhau là 1 giờ, hãy tính vận tốc của từng chiếc ôtô.

Câu 4. Gọi I, O lần lượt là tâm đường tròn nội tiếp và đường tròn ngoại tiếp (C) của tam giác nhọn ABC. Tia AI cắt đường tròn (C) tại K (K ≠ A) và J là điểm đối xứng I qua K. Gọi P và Q lần lượt là các điểm đối xứng của I và O qua BC.

a) Chứng minh rằng tam giác IBJ vuông tại B.

b) Tính góc BAC nếu Q thuộc (C).

c) Chứng minh rằng nếu Q thuộc (C) thì P cũng thuộc (C).

Câu 5. Chứng minh rằng từ 8 số nguyên dương tùy ý không lớn hơn 20, luôn chọn được ba số x, y, z là độ dài ba cạnh của một tam giác.

BÀI GIẢI

Câu 1.

a) $x - \sqrt{4x-3} = 2 \Leftrightarrow \sqrt{4x-3} = x - 2 \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 2 \\ 4x - 3 = (x-2)^2 \end{cases} \Leftrightarrow x = 7.$

Vậy x = 7 là nghiệm của phương trình đã cho.

b) Phương trình $x^2 - (m + 1)x + 2m = 0$ có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 sao cho x_1, x_2 là độ dài hai cạnh góc vuông một tam giác vuông có cạnh huyền bằng 5 khi và chỉ khi :

$$\begin{cases}\Delta > 0\\ S > 0\\ P > 0\\ x_1^2 + x_2^2 = 5^2\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}(m+1)^2 - 8m > 0\\ m + 1 > 0\\ 2m > 0\\ S^2 - 2P = 25\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}m^2 - 6m + 1 > 0\\ m > 0\\ (m-1)^2 = 25\end{cases} \Leftrightarrow m = 6.$$

Câu 2.

a) Theo giả thiết : $a^2 + b^2 + c^2 = (a - b)^2 + (b - c)^2 + (c - a)^2$.

Suy ra : $a^2 + b^2 + c^2 = 2(ab + bc + ca)$.

Do đó : $(a + b + c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2(ab + bc + ca) = 4(ab + bc + ca) = 36$.

Vậy $a + b + c = 6$.

b) Do $c \geq a$ và $c \geq b$ nên $2ab + 2bc + 2ca \geq 2ab + 2b^2 + 2a^2$.

Suy ra $a^2 + b^2 + c^2 = 2ab + 2bc + 2ca \geq 2ab + 2b^2 + 2a^2$.

Nên $c^2 \geq 2ab + a^2 + b^2 = (a + b)^2$.

Vậy $c \geq a + b$ (đpcm).

Câu 3. Gọi M là chỗ gặp nhau lần đầu; vận tốc của ôtô đi từ A là x (km/giờ); vận tốc của ôtô đi từ B là y (km/giờ).

Thời gian xe X_A đi từ A đến M là $\dfrac{20}{x}$ (giờ).

Thời gian này cũng là thời gian xe X_B đi từ B đến M. Ta có :

Khoảng cách BM là : $\dfrac{20}{x}.y = \dfrac{20y}{x}$ (km).

Quãng đường AB là : $20 + \dfrac{20y}{x}$ (km).

Khoảng cách CB là : $\dfrac{10}{60}.y = \dfrac{10y}{60} = \dfrac{y}{6}$ (km).

Khoảng cách AC là : $20 + \dfrac{20y}{x} - \dfrac{y}{6}$ (km).

Tổng khoảng cách MB và BC là : $\dfrac{20y}{x} + \dfrac{y}{6}$ (km).

Theo giả thiết ta có phương trình : $\dfrac{20y}{x} + \dfrac{y}{6} = x$ (1)

Tổng khoảng cách MA và AC là : $20 + 20 + \dfrac{20y}{x} - \dfrac{y}{6} = 40 + \dfrac{20y}{x} - \dfrac{y}{6}$ (km)

Theo giả thiết ta có phương trình : $40 + \dfrac{20y}{x} - \dfrac{y}{6} = y$ (2)

Từ (1) và (2) ta có hệ phương trình :

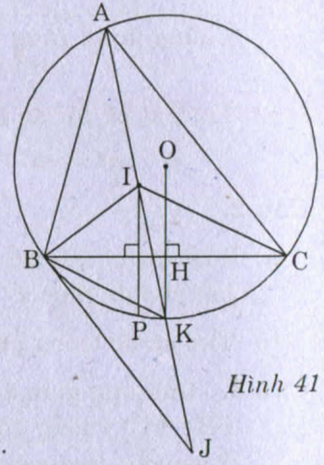
$$\begin{cases}\dfrac{20y}{x} + \dfrac{y}{6} = x\\ 40 + \dfrac{20y}{x} - \dfrac{y}{6} = y\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}y\left(\dfrac{20}{x} + \dfrac{1}{6}\right) = x & (3)\\ y\left(\dfrac{20}{x} - \dfrac{7}{6}\right) = -40 & (4)\end{cases}$$

Từ (3) và (4), ta có : $-40\left(\dfrac{20}{x} + \dfrac{1}{6}\right) = x\left(\dfrac{20}{x} - \dfrac{7}{6}\right) \Leftrightarrow 7x^2 - 160x - 4800 = 0$

Giải ra ta được x = 40 thay vào (3), ta được y = 60.

Vậy vận tốc của ôtô X_A là 40 (km/giờ). Vận tốc ôtô X_B là 60 (km/giờ).

Câu 4. *(Hình 41)*



Hình 41

a) Dễ thấy : $\widehat{KBI} = \widehat{KIB} = \dfrac{\widehat{BAC} + \widehat{ABC}}{2}$,

nên ΔKIB cân tại K, suy ra KB = KI = KJ.

Vậy tam giác IBJ vuông tại B.

b) Gọi R là bán kính đường tròn (C); H là giao điểm của BC và OQ. Vì Q $\in$ (C) nên có $OH = \dfrac{OQ}{2} = \dfrac{R}{2}$, hay $OH = \dfrac{OB}{2}$

$\Rightarrow \widehat{BOH} = 60^0$. Suy ra : $\widehat{BAC} = 60^0$.

c) Với Q $\in$ (C) thì $\widehat{BAC} = 60^0$, suy ra $\widehat{BIC} = 120^0$.

Do tính đối xứng ta có : $\widehat{BPC} = 120^0$. Suy ra $\widehat{BPC} + \widehat{BAC} = 180^0$.

Vậy tứ giác BACP nội tiếp được, nên P nằm trên đường tròn (C).

Câu 5. Giả sử 8 số nguyên dương tùy ý đã cho là $a_1, a_2, ..., a_8$ với $1 \leq a_1 \leq a_2 ... \leq a_8 \leq 20$.

Nhận thấy rằng với ba số dương a, b, c thỏa mãn $a \geq b \geq c$ và $b + c > a$ thì a, b, c là độ dài ba cạnh của một tam giác. Từ đó ta thấy nếu trong các số $a_1, a_2, ..., a_8$ không chọn được 3 số là độ dài 3 cạnh của một tam giác thì : $a_6 \geq a_7 + a_8 \geq 1 + 1 = 2$;

$a_5 \geq a_6 + a_7 \geq 2 + 1 = 3$;

$a_4 \geq a_5 + a_6 \geq 2 + 2 = 5$;

$a_3 \geq a_4 + a_5 \geq 5 + 3 = 8$;

$a_2 \geq a_3 + a_4 \geq 8 + 5 = 13$;

$a_1 \geq a_2 + a_4 \geq 13 + 8 = 21$, trái với giả thiết.

Vậy điều giả sử trên là sai. Do đó trong 8 số nguyên trên đã cho luôn chọn được ba số x, y, z là độ dài 3 cạnh của một tam giác.

ĐỀ 29

TRƯỜNG PHỔ THÔNG NĂNG KHIẾU, ĐHQG TPHCM

Đề thi tuyển sinh vào lớp 10 chuyên Toán, Tin năm học 2004 – 2005

Câu 1.

a) Giải hệ phương trình : $\begin{cases} x + \sqrt{y+5} = 1 \\ y + \sqrt{x+5} = 1 \end{cases}$

b) Cho x, y là các số thực thỏa mãn điều kiện $|x| < 1$, $|y| < 1$.

Chứng minh rằng : $|x| + |y| \geq \left|\dfrac{x+y}{1+xy}\right|$.

c) Tìm tất cả các số nguyên $m \geq 0$ sao cho phương trình :

$x^2 - (m-1)^2x + m = 0$ có các nghiệm đều nguyên.

Câu 2.

a) Tìm tất cả các số nguyên dương n sao cho đa thức $x^{3n+1} + x^{2n} + 1$ chia hết cho đa thức $x^2 + x + 1$.

b) Tìm số dư trong phép chia $A = 3^8 + 3^6 + 3^{2004}$ cho 91.

Câu 3. Cho tam giác đều ABC và một điểm P nằm trong tam giác. Hạ PA_1, PB_1, PC_1 vuông góc với BC, CA, AB tương ứng. Tìm tập hợp các điểm P sao cho tam giác $A_1B_1C_1$ là tam giác cân.

Câu 4. Cho tam giác nhọn ABC nội tiếp trong đường tròn (C) và M là một điểm thay đổi trên cung nhỏ BC. N là điểm đối xứng của M qua trung điểm I của AB.

a) Chứng minh trực tâm K của tam giác NAB thuộc một đường tròn cố định.

b) Giả sử NK cắt AB tại D, hạ KE vuông góc với BC. Gọi H là trực tâm tam giác ABC. Chứng minh rằng DE đi qua trung điểm J của HK.

Câu 5.

a) Trong một giải bóng đá có k đội tham gia, thi đấu vòng tròn một lượt (2 đội bất kì đấu với nhau đúng 1 trận). Đội thắng được 3 điểm, đội hòa được 1 điểm và đội thua không được điểm. Kết thúc giải, người ta nhận thấy rằng số trận thắng – thua gấp đôi số trận hòa và tổng số điểm của các đội là 176. Hãy tìm k.

b) Tìm tất cả các số nguyên dương A có hai chữ số sao cho số A chỉ thỏa mãn đúng hai trong bốn tính chất dưới đây :

i) A là bội số của 5.

ii) A là bội số của 21.

iii) A + 7 là số chính phương.

iv) A – 20 là số chính phương.

BÀI GIẢI

Câu 1.

a) $\begin{cases} x + \sqrt{y+5} = 1 \\ y + \sqrt{x+5} = 1 \end{cases}$ Đặt $u = \sqrt{x+5}$; $v = \sqrt{y+5}$; $(u \geq 0,\ v \geq 0)$.

Hệ trên trở thành : $\begin{cases} u^2 - 5 + v = 1 & (1) \\ v^2 - 5 + u = 1 & (2) \end{cases}$

Từ (1) và (2) có : $u^2 - v^2 + v - u = 0 \Leftrightarrow (u-v)(u+v-1) = 0$

– Với $u - v = 0 \Leftrightarrow u = v$, ta có :

$$u^2 - 5 + u = 1 \Leftrightarrow u = 2 \Leftrightarrow v = 2 \text{ (vì } u \geq 0).$$

Khi $\left[\begin{array}{lll} u = 2 & \Rightarrow \sqrt{x+5} = 2 & \Rightarrow x = -1 \\ v = 2 & \Rightarrow \sqrt{y+5} = 2 & \Rightarrow y = -1 \end{array}\right.$

– Với $u + v = 1$, từ (1) và (2) $\Rightarrow u^2 + v^2 + (u+v) = 12 \Leftrightarrow u^2 + v^2 = 11$.

Nhận xét rằng $2uv = (u+v)^2 - (u^2 + v^2) = -10 < 0$ (loại vì $u \geq 0$, $v \geq 0$).

Vậy hệ đã cho có nghiệm duy nhất (–1; –1).

b) Trường hợp 1 : $xy \geq 0$. Ta có $|x| + |y| \geq \dfrac{|x| + |y|}{1 + xy} \geq \left|\dfrac{x+y}{1+xy}\right|$.

Trường hợp 2 : $xy < 0$. Không mất tính tổng quát giả sử $x > 0$; $y > 0$.

– Nếu $x + y < 0$, suy ra $|xy| < 1$ (do $|x| < 1$, $|y| < 1$), dẫn đến $1 + |xy| > 0$.

Bất đẳng thức : $|x| + |y| \geq \left|\dfrac{x+y}{1+xy}\right| \Leftrightarrow x - y \geq \dfrac{-x-y}{1+xy}$

$\Leftrightarrow (x-y)(1+xy) \geq -x - y \Leftrightarrow x + x^2y - y - xy^2 \geq -x - y$

$\Leftrightarrow x(2 + xy - y^2) \geq 0 \Leftrightarrow x[(1+xy) + (1-y^2)] \geq 0$

(đúng do $|y| < 1 \Rightarrow 1 - y^2 > 0$; $1 + xy > 0$; $x > 0$).

– Nếu $x + y > 0$ thì : $|x| + |y| \geq \left|\dfrac{x+y}{1+xy}\right| \Leftrightarrow x - y \geq \dfrac{x+y}{1+xy}$

$\Leftrightarrow (x-y)(1+xy) \geq x + y \Leftrightarrow x^2 + x^2y - y - x^2y \geq x + y$

$\Leftrightarrow y(x^2 - xy - 2) \geq 0 \Leftrightarrow y[(x^2 - 1) - (xy + 1)] \geq 0$

(đúng vì $|x| < 1$; $-(xy + 1) < 0$; $y < 0$).

Vậy nếu $|x| < 1$, $|y| < 1$ thì : $|x| + |y| \ge \left|\dfrac{x+y}{1+xy}\right|$.

c) Gọi x_1, x_2 là hai nghiệm của phương trình : $x^2 - (m-1)^2x + m = 0$.

Theo định lí Viet ta có : $\begin{cases} x_1 + x_2 = (m-1)^2 & (1) \\ x_1.x_2 = m & (2) \end{cases}$

Vì $m \ge 0$ nên $x_1x_2 \ge 0$.

Mặt khác $x_1 + x_2 = (m-1)^2 \ge 0$, suy ra $x_1 \ge 0$ và $x_2 \ge 0$.

- Nếu $m = 0$ thì $x_1.x_2 = 0$. Suy ra $x_1 = 0$, $x_2 = 1$ hoặc $x_1 = 1$, $x_2 = 0$.
- Nếu $m = 1$ thì $x_1 + x_2 = 0$. Suy ra $x_1 = x_2 = 0$ mà $x_1x_2 = 1$ nên vô lí.
- Nếu $m \ge 2$ thì ta có $x_1 > 0$, $x_2 > 0$. Mà $x_1 \in Z$ nên $x_1 \ge 1$ và $x_2 \ge 1$.

Do đó : $(x_1 - 1)(x_2 - 1) \ge 0 \quad \Leftrightarrow \quad x_1x_2 - (x_1 + x_2) + 1 \ge 0$.

Thay (1) và (2) vào bất phương trình ta được :

$$m - (m-1)^2 + 1 \ge 0 \quad \Leftrightarrow \quad m(3-m) \ge 0 \quad \Leftrightarrow \quad 0 \le m < 3.$$

Do m nguyên, $m \ge 2$ nên $m = 2$ hoặc $m = 3$.

- Với $m = 2$, ta có : $\begin{cases} x_1 + x_2 = 1 \\ x_1.x_2 = 2 \end{cases}$ (vô nghiệm).
- Với $m = 3$, ta có : $\begin{cases} x_1 + x_2 = 4 \\ x_1.x_2 = 3 \end{cases}$ Hệ này có hai nghiệm $(x_1; x_2)$ là : $(1; 3), (3; 1)$.

Vậy với $m = 0$, $m = 3$ thì phương trình đã cho có hai nghiệm đều nguyên.

Câu 2.

a) Ta có : $x^3 - 1 = (x-1)(x^2 + x + 1)$ chia hết cho $x^2 + x + 1$.

Do đó với $m \in N^*$ thì : $x^{3m} - 1 = (x^3)^m - 1^m$ chia hết cho $x^3 - 1$.

Từ đó $x^{3m} - 1$ chia hết cho $x^2 + x + 1$.

Đặt $n = 3a + r$ ($a \in N^*$; $r = 0, 1, 2$). Ta có :

$$\begin{aligned} x^{3n+1} + x^{2n} + 1 &= x^{9a+3r+1} + x^{6a+2r} + 1 \\ &= x(x^{9a+3r} - 1) + x^{2r}(x^{6a} - 1) + x + x^{2r} + 1 \\ &= x[(x^3)^{3a+r} - 1] + x^{2r}[(x^3)^{2a} - 1] + (x^{2r} + x + 1). \end{aligned}$$

Suy ra : $x^{3n+1} + x^{2n} + 1$ chia hết cho $x^2 + x + 1$ khi và chỉ khi :

$x^{2r} + x + 1$ chia hết cho $x^2 + x + 1$.

- Nếu $r = 0$ thì $x^{2r} + x + 1 = x + 2$ không chia hết cho $x^2 + x + 1$.
- Nếu $r = 1$ thì $x^{2r} + x + 1 = x^2 + x + 1$ chia hết cho $x^2 + x + 1$.

- Nếu $r = 2$ thì $x^{2r} + x + 1 = x^4 + x + 1 = x(x^3 - 1) + 2x + 1$ không chia hết cho $x^2 + x + 1$.

Vậy với $n \in N^*$, n chia cho 3 dư 1 thì : $x^{3n+1} + x^{2n} + 1$ chia hết cho $x^2 + x + 1$.

b) Ta có : $3^6 - 1 = 729 - 1 = 728$ chia hết cho 91.

Do đó : $A = 3^8 + 3^6 + 3^{2004} = (3^8 - 3^2) + (3^6 - 1) + (3^{2004} - 1) + 3^2 + 1 + 1$

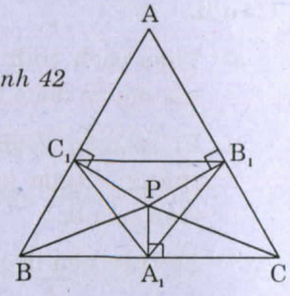
$= 3^2(3^6 - 1) + (3^6 - 1) + ((3^6)^{334} - 1) + 11$

Vậy $A = 3^8 + 3^6 + 3^{2004}$ chia hết cho 91 dư 11.

Câu 3. *(Hình 42)*

- *Phần thuận :* Giả sử tam giác $A_1B_1C_1$ cân tại A_1, khi đó $A_1C_1 = A_1B_1$. (1)

Tứ giác BC_1PA_1 nội tiếp đường tròn đường kính BP, mà $\widehat{A_1BC_1} = 60^0$ nên A_1C_1 là cạnh của tam giác đều nội tiếp đường tròn đường kính BP.



Hình 42

Suy ra : $A_1C_1 = BP\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ (2)

Tương tự, ta có : $A_1B_1 = CP\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ (3)

Từ (1), (2) và (3), ta có : BP = CP

Vì BC cố định nên P nằm trên đường cao AA' của tam giác đều ABC.

- *Phần đảo :* Lấy điểm P bất kì trên đoạn AA' thì PB = PC.

Vẽ PA_1 vuông góc với BC, PB_1 vuông góc với AC, PC_1 vuông góc với AB. Theo chứng minh trên ta có : $A_1C_1 = BP\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ và $A_1B_1 = CP\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

Suy ra $A_1B_1 = A_1C_1$, nghĩa là tam giác $A_1B_1C_1$ cân tại A_1.

- *Kết luận :* Tập hợp điểm P sao cho tam giác $A_1B_1C_1$ cân là ba đường cao của ΔABC.

Câu 4. *(Hình 43)*

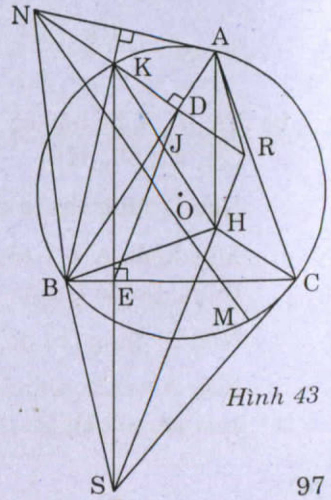
a) Tứ giác BNAM là hình bình hành, suy ra

BN // AM và AN // BM.

Mặt khác BK ⊥ NA, AK ⊥ NB (vì K là trực tâm tam giác NAB).

Do đó BK ⊥ BM và AK ⊥ AM, suy ra tứ giác BKAM nội tiếp đường tròn đường kính BM.

Vậy K thuộc đường tròn (C) cố định.



Hình 43

b) Gọi S là điểm đối xứng của K qua E, R là điểm đối xứng của K qua D.

Ta có $\widehat{BKC} = \widehat{BSC}$ (do tính đối xứng);

$\widehat{BKC} = \widehat{BAC}$ (cùng chắn cung $\overset{\frown}{BM}$) nên $\widehat{BSC} = \widehat{BAC}$.

Mà $\widehat{BHC} + \widehat{BAC} = 180^0$ nên $\widehat{BHC} + \widehat{BSC} = 180^0$.

Suy ra tứ giác BHCS nội tiếp, nện : $\widehat{BHS} = \widehat{BCS} = \widehat{BCK}$ (1)

Tương tự, ta có ABHR nội tiếp, nên : $\widehat{AHR} = \widehat{ABR} = \widehat{ABK}$ (2)

Từ (1) và (2), ta có :

$$\widehat{AHB} + \widehat{BHS} + \widehat{AHR} = \widehat{AHB} + \widehat{BCK} + \widehat{ABK} = \widehat{AHB} + \widehat{BCK} + \widehat{ACK} = 180^0.$$

Suy ra S, H, R thẳng hàng. Vì DE là đường trung bình của tam giác KRS, nên DE đi qua trung điểm J của HK.

Câu 5.

a) Theo cách tính điểm của bài toán thì sau mỗi trận đấu tổng số điểm hai đội có được là 3 nếu là trận thắng – thua và là 2 nếu là trận hòa.

Vì số trận thắng – thua gấp đôi số trận hòa nên tổng số điểm trận thắng – thua gấp 3 lần tổng số điểm trận hòa. Do đó tổng số điểm trận hòa là : $176 : (3 + 1) = 44$ (điểm)

Số trận hòa là : $44 : 2 = 22$ (trận)

Số trận thắng – thua là : $22 \times 2 = 44$ (trận)

Tổng số trận đấu đã đấu là : $22 + 44 = 66$ (trận).

Một đội đấu với $(k - 1)$ đội còn lại có $(k - 1)$ (trận).

Vì có k đội nên có $k(k - 1)$ (trận), mỗi trận đấu được tính hai lần nên số trận đấu là : $\dfrac{k(k-1)}{2}$ (trận).

Ta có : $\dfrac{k(k-1)}{2} = 66 \Rightarrow k = 12$.

b) Từ ii) A là bội số 21, A là số nguyên dương có hai chữ số nên $A \in \{21; 42; 63; 84\}$.

Nếu i) đúng thì ta thấy ii) sai.

Mặt khác A + 7 có chữ số tận cùng là 7 hoặc 2 nên iii) sai, trái với giả thiết. Do đó i) sai.

Nếu ii) đúng thì dễ thấy i) sai.

Nếu $A \in \{21; 63; 84\}$ thì A + 7 không là số chính phương nên iii) sai, trái với giả thiết.

Nếu A = 42 thì A – 20 không là số chính phương nên iv) sai, trái với giả thiết, nên ii) sai.

Theo giả thiết, ta có iii) và iv) đúng.

Đặt : $A + 7 = x^2$; $A - 20 = y^2$ $(x, y \in N)$.

Ta có : $(A + 7) - (A - 20) = x^2 - y^2 \Leftrightarrow x^2 - y^2 = 27$

$\Leftrightarrow (x + y)(x - y) = 27$.

Do $x + y > 0$ nên $x - y > 0$, mà $x + y \geq x - y$.

Vậy ta có các hệ phương trình sau : $\begin{cases} x + y = 27 \\ x - y = 1 \end{cases}$ (I) hoặc $\begin{cases} x + y = 9 \\ x - y = 3 \end{cases}$ (II)

(I) vô nghiệm. Giải (II) ta được x = 6, y = 3.

Với x = 6, ta có $A = x^2 - 7 = 29$.

Thử lại : với A = 29 thấy i) và ii) sai; iii) và iv) đúng. Vậy số cần tìm là 29.

ĐỀ 30

TRƯỜNG PHỔ THÔNG NĂNG KHIẾU, ĐHQG TP.HCM

Đề thi tuyển sinh vào lớp 10 (Ban A, B) năm học 2003 – 2004

Câu 1. Cho phương trình : $mx^2 + 2mx + m^2 + 3m - 3 = 0$ (1)

a) Định m để phương trình (1) vô nghiệm.

b) Định m để phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 thỏa mãn :

$$|x_1 - x_2| = 1.$$

Câu 2.

a) Giải phương trình : $\sqrt{x(x-2)} + \sqrt{x(x-5)} = \sqrt{x(x+3)}$.

b) Giải hệ phương trình : $\begin{cases} (x^2 + y^2)(x^2 - y^2) = 144 \\ \sqrt{x^2 + y^2} - \sqrt{x^2 - y^2} = y \end{cases}$

Câu 3. Cho tam giác ABC có $\widehat{A} = 45^0$. Gọi M và N lần lượt là chân đường cao. Kẻ từ B và C của tam giác ABC.

a) Tính tỉ số $\dfrac{MN}{BC}$.

b) Gọi O là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC. Chứng minh rằng $OA \perp MN$.

Câu 4. Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình vuông cạnh a; mặt bên SAB là tam giác đều; mặt bên SCD là tam giác vuông cân tại S.

Gọi I, J lần lượt là trung điểm của AB và CD.

a) Tính diện tích tam giác SIJ theo a.

b) Gọi H là chân đường cao kẻ từ S của tam giác SIJ. Chứng minh rằng SH ⊥ AC.

Câu 5. Lớp 9A có 28 học sinh đăng kí dự thi vào các lớp chuyên Toán, Lí, Hóa của trường phổ thông năng khiếu. Trong đó : Không có học sinh nào chỉ chọn thi vào lớp Lí hoặc chỉ chọn vào lớp Hóa. Có ít nhất 3 học sinh chọn thi vào cả ba lớp Toán, Lí và Hóa. Số học sinh chọn thi vào lớp Toán và Lí bằng số học sinh chỉ chọn thi vào lớp Toán. Có 6 học sinh chọn thi vào lớp Toán và Hóa. Số học sinh chọn thi vào lớp Toán và lớp Hóa gấp 5 lần số học sinh chọn thi vào cả 3 lớp Toán, Lí và Hóa. Hỏi số học sinh chọn thi vào từng lớp là bao nhiêu ?

BÀI GIẢI

Câu 1.

a) Với m = 0, (1) vô nghiệm.

Với $m \neq 0$, (1) vô nghiệm khi và chỉ khi $\Delta' = -m(m-1)(m+3) < 0$

$\Rightarrow m > 1$ hoặc $-3 < m \leq 0$.

b) Phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 khi và chỉ khi :

$$\begin{cases} m \neq 0 \\ -m(m-1)(m+3) > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 < m < 1 \\ m < -3 \end{cases} \quad (*)$$

Theo định lí Viet, ta có : $\begin{cases} S = x_1 + x_2 = \dfrac{-2m}{m} = -2 \\ P = x_1x_2 = \dfrac{m^2+3m-3}{m} \end{cases}$

Theo đề : $|x_1 - x_2| = 1 \quad \Leftrightarrow \quad (x_1+x_2)^2 - 4x_1x_2 = 1$.

Hay : $(-2)^2 - \dfrac{4(m^2+3m-3)}{m} = 1 \quad \Leftrightarrow \quad -4m^2 - 9m + 12 = 0$

$$\Leftrightarrow \quad m_1 = \frac{-9+\sqrt{273}}{8} \text{ hoặc } m_2 = \frac{-9-\sqrt{273}}{8}.$$

So với điều kiện (*) ta nhận hai giá trị m trên.

Câu 2.

a) Điều kiện : $x \leq -3$ và $x \geq 5$ hoặc $x = 0$.

$$\sqrt{x(x-2)} + \sqrt{x(x-5)} = \sqrt{x(x+3)}$$

$$\Leftrightarrow \quad x(x-2) + x(x-5) + 2\sqrt{x^2(x-5)(x-2)} = x(x+3)$$

$$\Leftrightarrow \quad x^2 - 2x + x^2 - 5x + 2\sqrt{x^2(x-5)(x-2)} = x^2 + 3x$$

$$\Leftrightarrow \quad 2\sqrt{x^2(x-5)(x-2)} = 10x - x^2$$

$$\Leftrightarrow \quad 4x^2(x-5)(x-2) = 100x - 20x^3 + x^4$$

$$\Leftrightarrow \quad x^2(3x^2 - 8x - 60) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = 6 \\ x = -\dfrac{10}{3} \end{array}\right.$$

Thử lại ta thấy phương trình đã cho có hai nghiệm $x_1 = 0$, $x_2 = 6$.

b) $\begin{cases} (x^2+y^2)(x^2-y^2) = 144 \\ \sqrt{x^2+y^2} - \sqrt{x^2-y^2} = y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x^2+y^2)(x^2-y^2) = 144 \\ 2x^2 - 2\sqrt{(x^2+y^2)(x^2-y^2)} = y^2 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (x^2+y^2)(x^2-y^2) = 144 \\ 2\sqrt{(x^2+y^2)(x^2-y^2)} = 2x^2 - y^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x^2+y^2)(x^2-y^2) = 144 & (1) \\ y^2 = 2x^2 - 24 & (2) \end{cases}$$

Thay (2) vào (1), ta có :

$$(x^2 + 2x^2 - 24)(x^2 - 2x^2 + 24) = 144 \quad \Leftrightarrow \quad x^4 - 32x^2 + 256 = 16$$

$$\Leftrightarrow \quad (x^2 - 16)^2 = 16 \quad \Leftrightarrow \quad x^2 = 20;\ x^2 = 12.$$

Với $x^2 = 20 \Rightarrow y^2 = 16$.

Với $x^2 = 12 \Rightarrow y^2 = 0$.

Thử lại ta nhận các nghiệm sau :

$$(2\sqrt{5};\ 4),\ (-2\sqrt{5};\ 4),\ (2\sqrt{5};\ -4),\ (-2\sqrt{5};\ -4),\ (2\sqrt{3};\ 0),\ (-2\sqrt{3};\ 0).$$

Câu 3. *(Hình 44)*

a) Ta có : $\widehat{BMC} = \widehat{BNC} = 90^0$.

Nên 4 điểm B, C, M, N cùng nằm trên một đường tròn.

Suy ra : $\Delta AMN \backsim \Delta ABC \quad \Rightarrow \quad \dfrac{MN}{BC} = \dfrac{AM}{AB} \quad (1)$

Vì ΔMAB vuông cân tại M nên $\dfrac{AM}{AB} = \dfrac{\sqrt{2}}{2} \quad (2)$

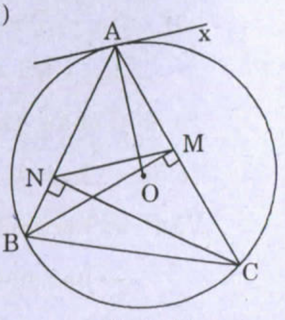
Từ (1) và (2), suy ra : $\dfrac{MN}{BC} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

b) Kẻ tia Ax tiếp xúc đường tròn (O).

Ta có $\widehat{MAx} = \widehat{ABC} = \widehat{AMN}$,

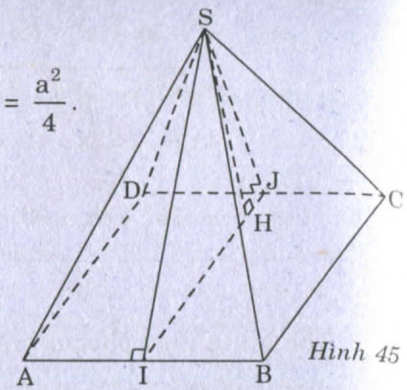
suy ra MN // Ax.

Mà OA ⊥ Ax, nên OA ⊥ MN.



Hình 44

Câu 4. *(Hình 45)*



Hình 45

a) Ta có : $IJ^2 = a^2$, $SI^2 = \frac{3a^2}{4}$, $SJ^2 = \frac{a^2}{4}$.

Suy ra $SI^2 + SJ^2 = IJ^2$,

nên tam giác SIJ vuông tại S.

Do đó : $S_{SIJ} = \frac{1}{2}SI.SJ = \frac{a^2\sqrt{3}}{8}$ (đvdt).

b) Ta có $AB \perp SI$ và $AB \perp IJ$,

suy ra $AB \perp mp(SIJ)$,

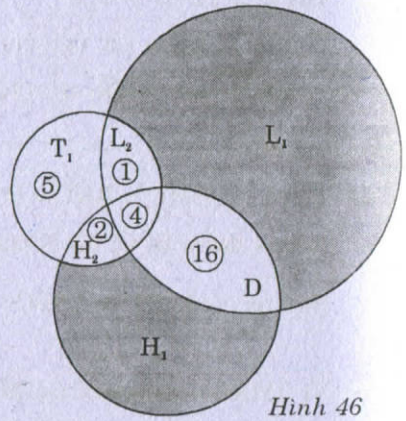
nên $AB \perp SH$.

Mà $SH \perp IJ$ (giả thiết) nên $SH \perp mp(ABCD)$.

Suy ra $SH \perp AC$.

Câu 5. *(Hình 46)*

Gọi T_1, L_1, H_1, L_2, H_2, D, C lần lượt là số học sinh chỉ chọn thi môn Toán, môn Lí, môn Hóa, môn Toán và môn Lí (không thi Hóa), môn Toán và môn Hóa (không thi Lí), môn Lí và môn Hóa (không thi Toán), thi cả ba môn.



Hình 46

Từ biểu đồ Ven-Ơle như hình vẽ và giả thiết, ta có :

$H_1 = L_1 = 0$; $C + L_2 = T_1$;

$H_2 + C = 6$; $D + C = 5C$

$\Rightarrow$ $D = 4C$.

Theo bài ra, ta lại có :

$T_1 + L_2 + C + H_2 + D = 28$

hay $(L_2 + C) + L_2 + 6 + 4C = 28$

$\Rightarrow$ $2L_2 + 5C = 22$ (1)

Ta có C chẵn, theo giả thiết $C \geq 3$, từ (1) suy ra $C = 4$,

do đó : $L_2 = 1$, $H_2 = 2$, $T_1 = 5$ và $D = 16$.

Vậy số học sinh chọn thi môn Toán là : $5 + 2 + 4 + 1 = 12$ (học sinh).

số học sinh chọn thi môn Lí là : $1 + 4 + 16 = 21$ (học sinh).

số học sinh chọn thi môn Hóa là : $2 + 4 + 16 = 22$ (học sinh).

ĐỀ 31

TRƯỜNG PHỔ THÔNG NĂNG KHIẾU, ĐHQG TPHCM

Đề thi tuyển sinh vào lớp 10 chuyên Toán, Tin năm học 2002 – 2003

Câu 1. Cho phương trình : $x - \sqrt{x+1} = m$ (1), trong đó m là tham số.

a) Giải phương trình (1) khi $m = 1$.

b) Tìm tất cả các giá trị của m để phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt.

Câu 2. Cho x, y, z là các số nguyên thỏa mãn phương trình : $x^2 + y^2 = z^2$.

a) Chứng minh rằng trong hai số x, y có ít nhất một số chia hết cho 3.

b) Chứng minh rằng tích xy chia hết cho 12.

Câu 3. Cho đường tròn (C) đường kính $BC = 2R$ và điểm A thay đổi trên (C) (A không trùng với B, C). Đường phân giác trong góc A của tam giác ABC cắt đường tròn tại điểm K ($K \neq A$). Hạ AH vuông góc với BC.

a) Đặt $AH = x$. Tính diện tích S của tam giác AHK theo R và x. Tìm x sao cho S đạt giá trị lớn nhất.

b) Chứng minh rằng khi A thay đổi, tổng $AH^2 + HK^2$ luôn là một đại lượng không đổi. Tính góc B của tam giác ABC biết rằng $\frac{AH}{HK} = \sqrt{\frac{3}{5}}$.

Câu 4. Cho các số thực a, b, c thỏa mãn điều kiện : $a + \frac{1}{b} = b + \frac{1}{c} = c + \frac{1}{a}$.

a) Cho $a = 1$, hãy tìm b, c.

b) Chứng minh rằng nếu a, b, c đôi một khác nhau thì $a^2b^2c^2 = 1$.

c) Chứng minh rằng nếu a, b, c đều dương thì $a = b = c$.

Câu 5. Trong một giải bóng đá có N đội tham gia thi đấu theo thể thức vòng tròn một lượt (hai đội bất kì đều gặp nhau đúng một lần). Sau mỗi trận đấu, đội thắng được ba điểm, đội thua không được điểm nào, còn nếu trận đấu có kết quả hòa thì mỗi đội được cùng một điểm. Các đội được xếp hạng dựa theo tổng điểm. Trong trường hợp một số đội có tổng điểm bằng nhau thì các đội này được xếp hạng theo các chỉ số phụ. Kết thúc giải người ta nhận thấy rằng không có trận đấu nào kết thúc với tỉ số hòa; các đội xếp nhất, nhì, ba có tổng điểm lần lượt là 15, 12, 12 và tất cả các đội xếp tiếp theo có tổng điểm đôi một khác nhau.

a) Chứng minh rằng $N \geq 7$.

b) Tìm N và tổng điểm của mỗi đội tham gia giải.

BÀI GIẢI

Câu 1.

a) Điều kiện : $x \ge 1$.

Đặt $y = \sqrt{x+1}$ $(y \ge 0)$, phương trình đã cho trở thành :

$$y^2 - y - m - 1 = 0 \qquad (2)$$

Với m = 1, ta có : $y^2 - y - 2 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y = -1 \text{ (loại vì } y \ge 0) \\ y = 2 \end{array}\right.$

Với y = 2, ta có : $\sqrt{x+1} = 2 \Leftrightarrow x = 3$.

b) Phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt ⇔ (2) có hai nghiệm phân biệt không âm :

$$\begin{cases} a \neq 0 \\ \Delta > 0 \\ S > 0 \\ P \ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 \neq 0 \\ 1 + 4m + 4 > 0 \\ 1 > 0 \\ -m - 1 \ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow -\frac{5}{4} < m \le -1.$$

Câu 2. Nhận xét :

i) Với $a \in Z$ thì $a^2 \equiv 0 \pmod 3$ hoặc $a^2 \equiv 1 \pmod 3$;

ii) $a^2 \equiv 0 \pmod 4$ hoặc $a^2 \equiv 1 \pmod 4$.

a) Ta chứng minh bằng phương pháp phản chứng.

Nếu cả hai số x, y đều không chia hết cho 3 thì x^2, y^2 cho 3 số dư là 1 (theo i)), suy ra $z^2 = x^2 + y^2$ chia cho 3 có số dư 2 (vô lí), suy ra điều cần chứng minh.

b) Ta xét các trường hợp :

- x, y cùng lẻ, ta có $x^2 \equiv 1 \pmod 4$, $y^2 \equiv 1 \pmod 4$,

  suy ra $z^2 = x^2 + y^2 \equiv 2 \pmod 4$ (vô lí).

- x, y cùng chẵn thì $xy \equiv \pmod 4$, mà theo a) thì $xy \equiv 0 \pmod 3$,

  do đó $xy \equiv 0 \pmod{12}$.

- x, y khác tính chẵn, lẻ. Không mất tính tổng quát, giả sử x chẵn, y lẻ khi đó z lẻ. Đặt $y = 2p + 1$, $z = 2q + 1$ $(p, q \in Z)$.

  Ta có : $x^2 = z^2 - y^2 = (2q+1)^2 - (2p+1)^2 = [4q(q+1) - 4p(p+1)]$ chia hết cho 8.

  Từ đó x chia hết cho 4. Theo kết quả câu a) thì xy chia hết cho 3 nên xy cũng chia hết cho 12 (đpcm).

Câu 3. *(Hình 47)*

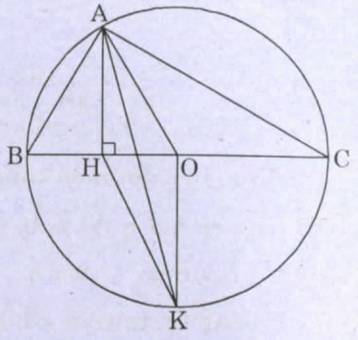
a) Ta có : AH // OK nên $S_{AHK} = S_{OAH} = \frac{1}{2}AH.OH = \frac{1}{2}x\sqrt{R^2 - x^2}$ (đvdt).

Mặt khác : $S_{AHK} = \frac{1}{2}x\sqrt{R^2 - x^2} \le \frac{1}{2}\left[\frac{x^2 + (R^2 - x^2)}{2}\right] = \frac{R^2}{4}$

(theo bất đẳng thức Côsi)

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $x = \frac{R\sqrt{2}}{2}$.

Vậy S_{AHK} đạt giá trị lớn nhất là $\frac{R^2}{4}$, đạt được khi $x = \frac{R\sqrt{2}}{2}$.



Hình 47

b) Theo định lí Pitago, ta có :

$$HK^2 = R^2 + OH^2$$
$$AH^2 = R^2 - OH^2$$

Do đó $AH^2 + HK^2 = 2R^2$ không đổi.

Ta có $\frac{AH}{KH} = \sqrt{\frac{3}{5}} \Rightarrow \frac{AH^2}{HK^2} = \frac{3}{5} \Rightarrow HK^2 = \frac{5}{3}AH^2$.

Mà $AH^2 + HK^2 = 2R^2$ hay $AH^2 + \frac{5}{3}AH^2 = 2R^2 \Rightarrow AH = \frac{\sqrt{3}}{2}R$.

ΔOAH vuông tại H có $AH = OA\frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{R\sqrt{3}}{2}$ nên là nửa tam giác đều.

Suy ra $\widehat{AOH} = 60^0$.

- Nếu H trên đoạn OB, ta có ΔOAB cân tại O, $\widehat{ACB} = 60^0$ nên là tam giác đều, suy ra $\widehat{ABC} = 60^0$.
- Nếu H trên đoạn OC thì tương tự, ta có $\widehat{ACB} = 60^0 \Rightarrow \widehat{ABC} = 30^0$.

Vậy $\widehat{ABC} = 60^0$ hoặc $\widehat{ABC} = 30^0$.

Câu 4.

a) Khi a = 1, ta có : $1 + \frac{1}{b} = b + \frac{1}{c} = c + 1 \Rightarrow c = \frac{1}{b}$; $1 + \frac{1}{b} = b + \frac{1}{c}$.

Do đó : $1 + \frac{1}{b} = b + \frac{1}{c} \Leftrightarrow 2b^2 - b - 1 = 0 \Leftrightarrow b = 1$; $b = -\frac{1}{2}$.

Với $b = 1 \Rightarrow c = 1$;

Với $b = -\frac{1}{2} \Rightarrow c = \frac{1}{-\frac{1}{2}} = -2$.

b) Ta có : $a + \frac{1}{b} = b + \frac{1}{c} = c + \frac{1}{a} \Rightarrow \begin{cases} a - b = \frac{1}{c} - \frac{1}{b} \\ b - c = \frac{1}{a} - \frac{1}{c} \\ c - a = \frac{1}{b} - \frac{1}{a} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a - c = \frac{b - c}{bc} \\ b - c = \frac{c - a}{ca} \\ c - a = \frac{a - b}{ab} \end{cases}$

$$\Rightarrow \quad (a - b)(b - c)(c - a) = \frac{(a - b)(b - c)(c - a)}{a^2b^2c^2}.$$

Vì a, b, c đôi một khác nhau nên $a^2b^2c^2 = 1$.

c) Giả sử $a > b$. Vì a, b, c > 0 nên từ điều kiện đề bài ta có :

$b > c \Rightarrow \quad c > a \quad \Rightarrow \quad a > b > c > a$ (vô lí). Vậy $a > b$ sai.

Tương tự, ta có $a < b$ sai.

Do đó $a = b$, suy ra $b = c$. Vậy $a = b = c$.

Câu 5.

a) Đội xếp nhất được 15 điểm nên đấu ít nhất với 5 đội khác.

Suy ra $N \geq 5 + 1$ hay $N \geq 6$.

Nếu $N = 6$ thì đội xếp nhất đạt 15 điểm nên đội này thắng 5 đội còn lại, đội xếp nhì đạt 12 điểm nên thắng 4 đội trừ đội xếp nhất. Đội xếp ba thua đội xếp nhất và nhì nên số điểm tối đa là $3.3 = 9$, vô lí (vì theo giả thiết thì đội xếp ba 12 điểm).

Do vậy $N \geq 7$ (đpcm).

b) Các đội còn lại có số điểm không lớn hơn 12.

Vì không có trận nào hòa nên số điểm các đội còn lại là bội của 3.

Số điểm còn lại có thể là : 0, 3, 6, 9, 12. Do đó $N \leq 5 + 3$. Vì $N \geq 7$ (câu a)) nên $N = 7$ và $N = 8$.

- Xét $N = 8$: Có 8 đội nên số trận đấu là : $\frac{8.7}{2} = 28$ trận.

Tổng số điểm 8 đội đạt được là 28.3, là số chẵn.

Còn $0 + 3 + 6 + 9 + 12 + 15$ là số lẻ, vô lí. Vậy $N \neq 8$.

- Xét $N = 7$: Vì có 7 đội nên số trận đấu là : $\frac{7.6}{2} = 21$ trận.

Tổng số điểm 7 đội đạt được là : $21.3 = 63$ điểm.

Tổng số điểm các đội còn lại (trừ đội nhất, nhì, ba) đạt được là :

$$63 - (12 + 12 + 15) = 24 = 0 + 3 + 9 + 12.$$

Chỉ có duy nhất cách biểu diễn 24 thành tổng 4 số là bội số của 3 và khác nhau như trên.

Tổng số điểm của mỗi đội còn lại đạt được lần lượt là : 0; 3; 9; 12.

ĐỀ 32

TRƯỜNG PHỔ THÔNG NĂNG KHIẾU, ĐHQG TPHCM

Đề thi tuyển sinh vào lớp 10 (Ban A, B) năm học 2002 – 2003

Câu 1. Cho phương trình : $x + 2\sqrt{x - 1} - m^2 + 6m - 11 = 0$.

a) Giải phương trình khi $m = 2$.

b) Chứng minh phương trình có nghiệm với mọi m.

Câu 2. Cho hệ phương trình :

$$\begin{cases} x + |y| + m(x^3 + 2x^2|y| + 2xy^2 + |y|^3) = 1 - m \\ x|y| = -6 \end{cases}$$

a) Giải hệ phương trình khi $m = 0$.

b) Giải hệ phương trình khi $m = 1$.

Câu 3. Gọi M, N lần lượt là trung điểm các cạnh AB, CD của hình chữ nhật ABCD. Biết rằng đường tròn ngoại tiếp hình chữ nhật ABCD có đường kính bằng $\sqrt{8 + 2\sqrt{3}}$ và tồn tại điểm I thuộc đoạn MN sao cho $\widehat{DAI} = 45^0$, $\widehat{IDA} = 30^0$.

a) Tính diện tích hình chữ nhật ABCD.

b) Gọi K, H lần lượt là trọng tâm của các tam giác AID và BIC. Tính diện tích tam giác NKH.

Câu 4. Tam giác ABC có $\widehat{ABC} = 30^0$ và $\widehat{ACB} = 15^0$. Gọi O là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC và M, N, P, I lần lượt là trung điểm của BC, CA, AB, OC.

a) Tính $\widehat{PON}$. Chứng minh A, M, I thẳng hàng.

b) Chứng minh P là trực tâm của tam giác OMN.

Câu 5.

a) Tìm tất cả số thực a và b sao cho $|2x + a| = |bx + 5|$ với mọi số thực x.

b) Cho a, b, c, d, e, f là các số thực thỏa điều kiện :

$|ax + b| + |cx + d| = |ex + f|$ với mọi số thực x. Biết a, c và e khác 0, chứng minh rằng : $ad = bc$.

BÀI GIẢI

Câu 1. Điều kiện : $x \geq 1$. Ta có : $x + 2\sqrt{x-1} - m^2 + 6m - 11 = 0$

$$\Leftrightarrow \quad (x-1) + 2\sqrt{x-1} - m^2 + 6m - 10 = 0$$

Đặt $y = \sqrt{x-1}$ $(y \geq 0)$.

Phương trình trên trở thành : $y^2 + 2y - m^2 + 6m - 10 = 0$ (1)

a) Khi $m = 2$, ta có : $y^2 + 2y - 2 = 0 \Leftrightarrow y_1 = -1 + \sqrt{3};\ y_2 = -1 - \sqrt{3}$ (loại).

Với $y_1 = -1 + \sqrt{3}$, ta có : $\sqrt{x-1} = -1 + \sqrt{3}$

$$\Leftrightarrow \quad x - 1 = (-1+\sqrt{3})^2 \text{ (vì } -1 + \sqrt{3} > 0) \quad \Leftrightarrow \quad x = 5 - 2\sqrt{3}.$$

Vậy khi $m = 2$ thì phương trình có nghiệm là $x = 5 - 2\sqrt{3}$.

b) Phương trình (1) có $a = 1 > 0$, $c = -m^2 + 6m - 10 = -(m-3)^2 - 1 < 0\ \forall m$.

Suy ra $a.c < 0\ \forall m$ nên (1) có hai nghiệm trái dấu với mọi m.

Vậy phương trình (1) luôn có một nghiệm dương, suy ra phương trình đã cho luôn có nghiệm với mọi m.

Câu 2.

a) Khi $m = 0$, hệ đã cho có dạng : $\begin{cases} x + |y| = 1 \\ x.|y| = -6 \end{cases}$

$\Rightarrow$ x và $|y|$ là nghiệm của phương trình : $t^2 - t - 6 = 0$.

Giải phương trình trên ta được : $t_1 = 3$; $t_2 = -2$.

Do đó : $\left[\begin{array}{l} x = 3;\ |y| = -2 \\ x = -2;\ |y| = 3 \end{array}\right. \quad \Leftrightarrow \quad \left[\begin{array}{l} x = 3;\ y \in \varnothing \\ x = -2;\ y = \pm 3 \end{array}\right.$

Vậy hệ phương trình có nghiệm (x; y) là : (–2; 3), (–2; –3).

b) Khi $m = 1$, hệ đã cho có dạng : $\begin{cases} x + |y| + x^3 + 2x^2|y| + 2xy^2 + |y|^3 = 0 \\ x|y| = -6 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (x + |y|) + (x^3 + 3x^2|y| + 3xy^2 + |y|^3) - (x^2|y| + xy^2) = 0 \\ x|y| = -6 \end{cases}$$

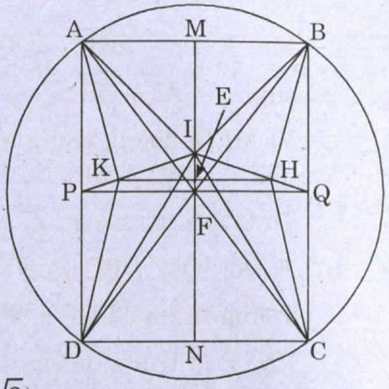
$$\Leftrightarrow \begin{cases} (x + |y|) + (x + |y|)^3 - x|y|(x + |y|) = 0 \\ x|y| = -6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x + |y|)[(x + |y|)^3 + 6] = 0 \\ x|y| = -6 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x + |y| = 0 \\ x|y| = -6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -|y| \\ x|y| = -6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -|y| \\ -|y|\,|y| = -6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -|y| \\ y = \pm\sqrt{6} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = -\sqrt{6};\ y = \sqrt{6} \\ x = -\sqrt{6};\ y = -\sqrt{6} \end{cases}$$

Vậy hệ có hai nghiệm (x; y) là : $(-\sqrt{6};\ \sqrt{6})$, $(-\sqrt{6};\ -\sqrt{6})$.

Câu 3. *(Hình 48)*



Hình 48

a) Từ giả thiết, ta có : $AC = BD = \sqrt{8 + 2\sqrt{3}}$.

Mặt khác $\widehat{AIM} = 45^0$, suy ra ΔAMI vuông cân tại M nên

$$MI = AM = \frac{1}{2}AB.$$

Do $\widehat{IDN} = 60^0$ nên

$$IN = DN\sqrt{3} = \frac{AB\sqrt{3}}{2}.$$

Lại có : $AD = MN = MI + IN = \frac{AB}{2}(1 + \sqrt{3})$.

Mặt khác $AB^2 + AD^2 = BD^2$ nên :

$$4AB^2 + AB^2(1+\sqrt{3})^2 = 4(8 + 2\sqrt{3}) \quad \text{suy ra } AB = 2$$

Suy ra $AD = 1 + \sqrt{3}$.

Vậy $S_{ABCD} = AB.AD = 2(1 + \sqrt{3})$ (đvdt).

b) Gọi P, Q lần lượt là trung điểm các cạnh AD và BC.

Ta có ΔAID có K là trọng tâm, IP là trung tuyến nên : $\frac{IK}{IP} = \frac{2}{3}$.

Tương tự, ta có : $\frac{IH}{IQ} = \frac{2}{3}$.

Xét ΔIPQ, ta có : $\frac{IK}{IP} = \frac{IH}{IQ} = \frac{2}{3}$ nên $KH \parallel PQ$.

Mà $PQ = AB = 2$. Do đó $KH = \frac{4}{3}$.

Ta có : $IF = IN - NF = \frac{AB\sqrt{3}}{2} - \frac{AD}{2} = \frac{\sqrt{3}-1}{2}$.

Do $IE = \frac{2}{3}IF = \frac{\sqrt{3}-1}{3}$, nên

$$NE = IN - IE = \sqrt{3} - \left(\frac{\sqrt{3}-1}{3}\right) = \frac{2\sqrt{3}+1}{3}.$$

Vậy $S_{NKH} = \frac{1}{2}NE.KH = \frac{1}{2}.\frac{2\sqrt{3}+1}{2}.\frac{4}{3} = \frac{2\sqrt{3}+1}{3}$ (đvdt).

Câu 4. *(Hình 49)*

a) Dễ thấy tứ giác APON nội tiếp nên : $\widehat{PON} + \widehat{PAN} = 180^0$.

Mà $\widehat{PAN} = 135^0 \Rightarrow \widehat{PON} = 45^0$.

Vì $\widehat{AOC} = 2\widehat{ABC} = 60^0$ nên ΔAOC đều, do đó $AI \perp OC$.

Mặt khác : $\widehat{BOC} = 90^0$,

suy ra : $AI \,//\, OB$ (1)

Vì MI là đường trung bình của ΔCBO

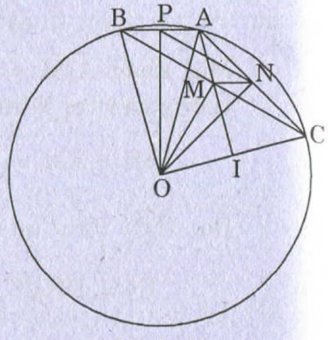
nên : $MI \,//\, OB$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra A, M, I thẳng hàng.

b) Ta có : $OM \perp BC$ và $NP \,//\, BC \Rightarrow NP \perp OM$.

Tương tự, ta có $OP \perp MN$.

Vậy P là trực tâm của tam giác OMN.



Hình 49

Câu 5.

a) $|2x + a| = |bx + 5| \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2x + a = bx + 5 \\ 2x + a = -bx - 5 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} (2 - b)x = 5 - a \\ (2 + b)x = -5 - a \end{array}\right.$

Đúng với mọi x $\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 5 - a = 0 \text{ và } 2 - b = 0 \\ -5 - a = 0 \text{ và } 2 + b = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a = 5 \text{ và } b = 2 \\ a = -5 \text{ và } b = -2 \end{array}\right.$

Vậy (a; b) bằng (5; 2) hoặc (–5; –2).

b) Cho $x = -\dfrac{f}{e}$, hệ thức bài ra có dạng : $\left|a\left(-\dfrac{f}{e}\right) + b\right| + \left|c\left(-\dfrac{f}{e}\right) + d\right| = 0$.

Suy ra : $\dfrac{b}{a} = \dfrac{f}{e} = \dfrac{d}{c} \Rightarrow ad = bc$ (đpcm).

ĐỀ 33

TRƯỜNG PHỔ THÔNG NĂNG KHIẾU, ĐHQG TPHCM

Đề thi tuyển sinh vào lớp 10 chuyên Toán, Tin năm học 2001 – 2002

Câu 1.

a) Tìm số nguyên dương a nhỏ nhất sao cho a chia hết cho 6 và 1000.a là số chính phương.

b) Tìm số nguyên dương b nhỏ nhất sao cho (b – 1) không là bội của 9, b là bội của bốn số nguyên tố liên tiếp và 2002.b là số chính phương.

Câu 2. Cho x, y là các số thực sao cho $x + \dfrac{1}{y}$ và $\dfrac{1}{y} + x$ đều là các số nguyên.

a) Chứng minh rằng : $x^2y^2 + \dfrac{1}{x^2y^2}$ là số nguyên.

b) Tìm tất cả các số nguyên dương n sao cho : $x^ny^n + \dfrac{1}{x^ny^n}$ là số nguyên.

Câu 3.

a) Cho các số dương a, b thỏa mãn điều kiện ab = 1. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $A = (a + b + 1)(a^2 + b^2) + \dfrac{4}{a + b}$.

b) Cho m, n là số nguyên thỏa mãn điều kiện : $\dfrac{1}{2m} + \dfrac{1}{n} = \dfrac{1}{3}$. Tìm giá trị lớn nhất của B = m.n.

Câu 4. Cho hai đường tròn (C_1) và (C_2) lần lượt có tâm O_1, O_2 và các bán kính tương ứng R_1, R_2, hai đường tròn này tiếp xúc ngoài với nhau tại A. Hai điểm B, C lần lượt di động trên (C_1) và (C_2) sao cho góc BAC vuông.

a) Chứng minh rằng trung điểm M của BC luôn luôn thuộc một đường tròn cố định.

b) Hạ AH vuông góc BC. Tìm tập hợp các điểm H. Chứng minh rằng độ dài đoạn AH không lớn hơn $\dfrac{2R_1R_2}{R_1 + R_2}$.

c) Phát biểu và chứng minh các kết quả tương tự như câu a) và câu b) trong trường hợp (C_1) và (C_2) tiếp xúc trong với nhau tại điểm A.

Câu 5. Giải hệ phương trình :

$$\begin{cases} \sqrt{x + 1} + \sqrt{x + 3} + \sqrt{x + 5} = \sqrt{y - 1} + \sqrt{y - 3} + \sqrt{y - 5} \\ x + y + x^2 + y^2 = 80 \end{cases}$$

BÀI GIẢI

Câu 1.

a) Theo giả thiết a chia hết cho 6 nên ta đặt a = 6k (k nguyên dương). Khi đó $1000.a = 6000k = 15.k.20^2$.

Để 1000.a là số chính phương với $a \in N^*$ thì 15.k, với $k \in N^*$ là số chính phương. Như vậy $k = 15t^2$, với t nguyên dương.

Vậy ta cần có $a = 6k = 90t^2$, với t nguyên dương. Suy ra số nguyên dương a nhỏ nhất là 90.

b) Do 2002.b = 2.7.11.13.b là số chính phương nên b có dạng $b = 2.7.11.13.k^2$, với k nguyên dương.

Ta chứng minh rằng số b nhỏ nhất cần tìm ứng với k = 10.

Thật vậy nếu k = 10 thì b là bội số của 4 số nguyên tố liên tiếp là 5, 7, 11, 13 và b − 1 = 200200 − 1 = 200199 không chia hết cho 9.

Xét k < 10. Khi đó, b muốn là bội số của 4 số nguyên tố liên tiếp thì chỉ có thể là bội số của 4 số : 2, 3, 5, 7 hoặc là bội số của 4 số 5, 7, 11, 13.

Khả năng đầu tiên không xảy ra vì khi đó k chia hết cho (3.5) hay k chia hết cho 15, vô lí do 0 < k < 10.

Khả năng thứ hai chỉ xảy ra khi k = 5. Tuy nhiên khả năng này cũng bị loại vì lúc đó $b - 1 = 2002.5^2 - 1 = 50049$ chia hết cho 9.

Vậy số nguyên dương b nhỏ nhất là 200200.

Câu 2.

a) Ta có : $\left(x + \frac{1}{y}\right)\left(y + \frac{1}{x}\right) = xy + \frac{1}{xy} + 2 \in Z$ nên $xy + \frac{1}{xy} \in Z$.

Suy ra $\left(xy + \frac{1}{xy}\right)^2 = x^2y^2 + \frac{1}{x^2y^2} + 2 \in Z$. Do vậy $x^2y^2 + \frac{1}{x^2y^2} \in Z$.

b) Theo câu a) ta có $x^2y^2 + \frac{1}{x^2y^2} \in Z$.

Ta chứng minh bằng quy nạp theo $n \in N^*$ rằng $x^ny^n + \frac{1}{x^ny^n} \in Z$.

Với n = 1, 2 thì mệnh đề đúng.

Giả sử mệnh đề đúng với n ≤ k, với k ≥ 2.

Xét n = k + 1, ta có :

$$x^{k+1}y^{k+1} + \frac{1}{x^{k+1}y^{k+1}} = \left(x^ky^k + \frac{1}{x^ky^k}\right)\left(xy + \frac{1}{xy}\right) - \left(x^{k-1}y^{k-1} + \frac{1}{x^{k-1}y^{k-1}}\right)$$

là số nguyên, vì theo giả thiết quy nạp ta có : $\begin{cases} xy + \frac{1}{xy} \in Z \\ x^ky^k + \frac{1}{x^ky^k} \in Z \\ x^{k-1}y^{k-1} + \frac{1}{x^{k-1}y^{k-1}} \in Z \end{cases}$

Vậy mệnh đề đúng cho n = k + 1. Theo nguyên lí quy nạp, mệnh đề đã được chứng minh.

Câu 3.

a) Theo bất đẳng thức Côsi cho hai số dương a^2 và b^2 :

$$a^2 + b^2 \geq 2\sqrt{a^2b^2} = 2ab = 2.$$

Suy ra : $A = (a + b + 1)(a^2 + b^2) + \frac{4}{ab} \geq 2\left[(a + b + 1) + \frac{2}{a + b}\right]$

$$= 2 + \left(a + b + \frac{4}{a + b}\right) + (a + b).$$

Cũng theo bất đẳng thức Côsi cho hai số dương a + b và $\frac{4}{a + b}$, ta có :

$$a + b + \frac{4}{a + b} \geq 2\sqrt{(a + b)\frac{4}{a + b}} = 4.$$

Mặt khác : $a + b \geq 2\sqrt{ab} = 2$. Suy ra :

$$A \geq 2 + \left(a + b + \frac{4}{a + b}\right) + (a + b) \geq 2 + 4 + 2 = 8.$$

Với a = b = 1 thì A = 8.

Vậy giá trị nhỏ nhất của A là 8, đạt được khi a = b = 1.

b) Vì $\frac{1}{2m} + \frac{1}{n} = \frac{1}{3}$ nên trong hai số m, n phải có ít nhất một số dương.

Nếu có một trong hai số là âm thì B < 0. Vì ta tìm được giá trị lớn nhất của B = m.n nên ta chỉ xét trường hợp cả hai số m, n cùng dương.

Ta có : $\frac{1}{2m} + \frac{1}{n} = \frac{1}{3} \Leftrightarrow 3(2m + n) = 2mn \Leftrightarrow (2m - 3)(n - 3) = 9$

Vì m, n là các số nguyên dương nên n − 3 ≥ −2 và 2m − 3 ≥ −1.

Khi phân tích 9 thành tích của hai thừa số nguyên lớn hơn hoặc bằng −2, ta có các cách : 9 = 1.9 = 3.3 = 9.1. Vậy ta có các trường hợp sau :

- $\begin{cases} 2m - 3 = 1 \\ n - 3 = 9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = 2 \\ n = 12 \end{cases}$ và B = m.n = 24.
- $\begin{cases} 2m - 3 = 3 \\ n - 3 = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = 3 \\ n = 6 \end{cases}$ và B = m.n = 18.
- $\begin{cases} 2m - 3 = 9 \\ n - 3 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = 6 \\ n = 4 \end{cases}$ và B = m.n = 24.

Vậy giá trị lớn nhất của B là 24.

Câu 4. *(Hình 50a, 50b, 50c)*

a) Trong các tam giác cân BO_1A và CAO_2 ta có :

$$\widehat{BO_1A} + \widehat{AO_2C} = (180^0 - 2\widehat{O_1AB}) + (180^0 - 2\widehat{CAO_2})$$

$$= 360^0 - 2(180^0 - \widehat{BAC}) = 180^0.$$

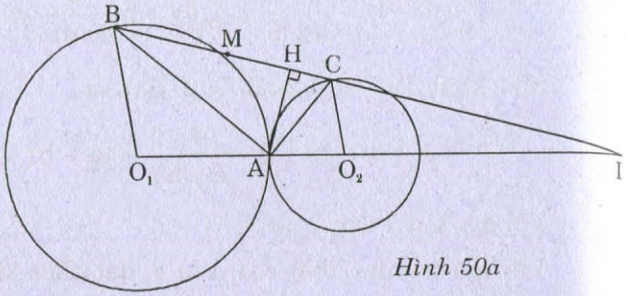
Suy ra $BO_1 // CO_2$.

Gọi N là trung điểm của O_1O_2 thì N cố định và MN là đường trung bình của hình thang BO_1O_2C, suy ra : $MN = \frac{1}{2}(O_1B + O_2C) = \frac{1}{2}(R_1 + R_2)$.

Vậy M thuộc đường tròn tâm N, bán kính $\frac{R_1 + R_2}{2}$.

b) Xét hai trường hợp :

- Trường hợp 1 : *(Hình 50a)*



Hình 50a

$R_1 \neq R_2$, ta có thể giả sử $R_1 > R_2$. Khi đó BC cắt O_1O_2 tại I thỏa mãn :

$$\frac{IO_2}{IO_1} = \frac{O_2C}{O_1B} = \frac{R_2}{R_1}.$$

Vậy I cố định.

Do $\widehat{AHI} = 90^0$ nên H nằm trên đường tròn (C) đường kính AI. Điểm H thỏa mãn điều kiện đề bài khi và chỉ khi $H \in (C)$, đồng thời IH cắt (C_2). Từ đó suy ra tập hợp các điểm H là cung H_1AH_2 của đường tròn (C), trong đó IH_1 và IH_2 là hai tiếp tuyến kẻ từ I đến (C_2).

Dễ thấy $AH \leq AH_1$. Ta có :

$$\frac{IO_2}{IO_1} = \frac{R_2}{R_1} \Rightarrow \frac{IO_2}{IO_1 - IO_2} = \frac{R_2}{R_1 - R_2} \Rightarrow IO_2 = \frac{R_2(R_1 + R_2)}{R_1 - R_2}$$

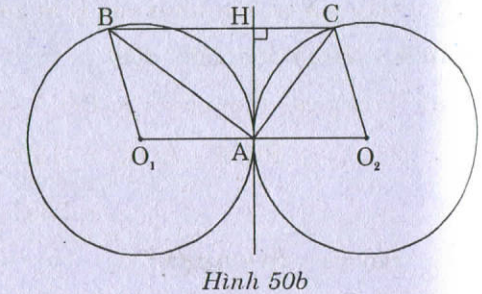
Gọi I_1 là tiếp điểm của tiếp tuyến IH_1 của (C_2), ta có O_2I_1 // AH_1 nên $\frac{I_1O_2}{AH_1} = \frac{IO_2}{IA}$, do đó

$$AH_1 = \frac{IA.I_1O_2}{IO_2} = \frac{R_2(IO_2 + R_2)}{IO_2} = R_2\left(1 + \frac{R_2}{IO_2}\right)$$

$$= R_2\left(1 + \frac{R_1 - R_2}{R_1 + R_2}\right) = \frac{2R_1R_2}{R_1 + R_2}.$$

Suy ra $AH \leq AH_1 = \frac{2R_1R_2}{R_1 + R_2}$.

- Trường hợp 2 : *(Hình 50b)*



Hình 50b

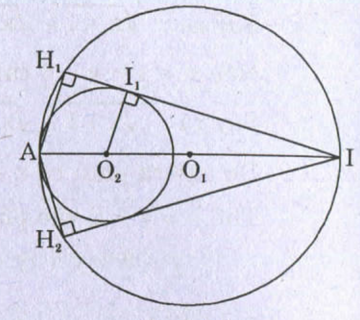
$R_1 = R_2$. Trong trường hợp này, O_1B // O_2C và $O_1B = O_2C$ nên O_1BCO_2 là hình bình hành, suy ra BC // O_1O_2.

Vì $AH \perp BC$ nên $AH \perp O_1O_2$.

Vậy H nằm trên tiếp tuyến chung Ax của hai đường tròn (C_1) và (C_2).

Dễ thấy $AH \leq O_1B = R_1 = \frac{2R_1R_2}{R_1 + R_2}$ và tập hợp điểm H là đoạn H_1H_2 với $H_1H_2 = 2R_1$ và A là trung điểm của H_1H_2.

c) Trong trường hợp (C_1) và (C_2) tiếp xúc trong với nhau tại điểm A, các kết quả tương tự như câu a) và câu b) được phát biểu như sau :



Hình 50c

Cho hai đường tròn (C_1) và (C_2) lần lượt có tâm O_1, O_2 và các bán kính tương ứng là R_1, R_2 với $R_1 < R_2$, hai đường tròn này tiếp xúc trong với nhau tại A. Hai điểm B, C lần lượt di động trên (C_1) và (C_2) sao cho góc BAC vuông.

(1) Chứng minh trung điểm M của BC luôn thuộc một đường tròn cố định.

(2) Hạ AH vuông góc với BC. Tìm tập hợp điểm H. Chứng minh rằng :

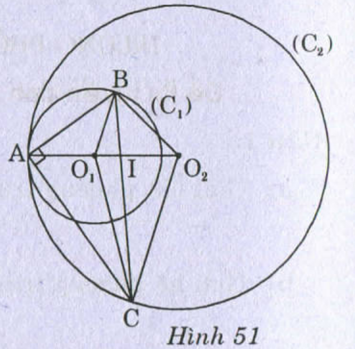
$$AH \leq \frac{2R_1R_2}{R_1 + R_2}.$$

Chứng minh :

(1) Ta có : $\widehat{O_2O_1B} = 2\widehat{O_1AB} = 2(90^0 - \widehat{O_2AC}) = 180^0 - 2\widehat{O_2AC} = \widehat{AO_2C}$.

Suy ra O_1B // O_2C nên O_1BCO_2 là hình thang.

Gọi N là trung điểm của O_1O_2 thì N cố định.



Hình 51

Suy ra MN // O_1B

và $MN = \frac{1}{2}(O_2C - O_1B)$.

Do đó M nằm trên đường tròn tâm N, bán kính $\frac{1}{2}(R_2 - R_1)$.

(2) Gọi I là giao điểm của BC và O_1O_2.

Ta có : O_1, O_2 cố định và $\frac{O_1B}{O_2C} = \frac{R_1}{R_2} = \frac{IO_1}{IO_2}$ nên I cố định.

Vì $\widehat{AIH} = 90^0$ nên H nằm trên đường tròn đường kính AI.

Ta có $\frac{IO_1}{R_1} = \frac{IO_2}{R_2} = \frac{IO_1 + IO_2}{R_1 + R_2} = \frac{O_1O_2}{R_1R_2}$.

Suy ra $IO_1 = \frac{R_1}{R_1 + R_2}O_1O_2 = \frac{R}{R_1 + R_2}(R_2 - R_1)$.

Nên $AH \le AI = AO_1 + O_1I = R_1 + \dfrac{R_1}{R_1 + R_2}(R_2 - R_1) = \dfrac{2R_1R_2}{R_1 + R_2}$.

Câu 5. Điều kiện : $x \ge -1$ và $y \ge 5$.

– Nếu $x + 1 > y - 5$ thì $x > y - 6$ và $x + 3 > y - 3$, $x + 5 > y - 1$.

Suy ra : $\sqrt{x+1} + \sqrt{x+3} + \sqrt{x+5} > \sqrt{y-1} + \sqrt{y-3} + \sqrt{y-5}$.

– Nếu $x + 1 < y - 5$ thì $x < y - 6$ và $x + 3 < y - 3$, $x + 5 < y - 1$.

Suy ra : $\sqrt{x+1} + \sqrt{x+3} + \sqrt{x+5} < \sqrt{y-1} + \sqrt{y-3} + \sqrt{y-5}$.

Do vậy ta phải có $x + 1 = y - 5$ hay $x = y - 6$.

Thế $x = y - 6$ vào phương trình cuối của hệ, ta được :

$$y - 6 + y + (y - 6)^2 + y^2 = 80 \Leftrightarrow 2y^2 - 10y + 30 = 80$$
$$\Leftrightarrow y^2 - 5y - 25 = 0$$

Giải phương trình trên ta có : $y = \dfrac{5 - \sqrt{125}}{2}$ (loại) và $y = \dfrac{5 + \sqrt{125}}{2}$.

Với $y = \dfrac{5 + \sqrt{125}}{2}$ thì $x = y - 6 = \dfrac{\sqrt{125} - 7}{2}$.

Vậy nghiệm của hệ đã cho là : $x = \dfrac{\sqrt{125} - 7}{2}$, $y = \dfrac{5 + \sqrt{125}}{2}$.

ĐỀ 34

TRƯỜNG PHỔ THÔNG NĂNG KHIẾU, ĐHQG TPHCM

Đề thi tuyển sinh vào lớp 10 (Ban A, B) năm học 2001 – 2002

Câu 1.

a) Giải bất phương trình : $\sqrt{x+1} > 2x - 1$.

b) Giải hệ phương trình : $\begin{cases} x + \dfrac{1}{y} = \dfrac{7}{2} \\ y + \dfrac{1}{x} = \dfrac{7}{3} \end{cases}$

Câu 2. Cho a, b, c là các số thực phân biệt sao cho các phương trình :

$x^2 + ax + 1 = 0$ và $x^2 + bx + c = 0$ có nghiệm chung,

đồng thời các phương trình : $x^2 + x + a = 0$ và $x^2 + cx + b = 0$ cũng có nghiệm chung. Hãy tìm tổng a + b + c.

Câu 3.

a) Trên các cạnh AB và CD của hình vuông ABCD lần lượt lấy các điểm M, N sao cho $AM = CN = \dfrac{AB}{3}$. Gọi K là giao điểm của AN và DM. Chứng minh rằng trực tâm của tam giác ADK nằm trên cạnh BC.

b) Cho hình vuông ABCD với giao điểm hai đường chéo là O. Một đường thẳng d vuông góc với mặt phẳng (ABCD) tại O. Lấy một điểm S trên d. Chứng minh rằng $(AC) \perp (SBD)$ và $(SAC) \perp (SBD)$.

Câu 4. Cho tứ giác lồi ABCD có AB vuông góc với CD và AB = 2, BC = 13, CD = 8, DA = 5.

a) Đường (BA) cắt đường (DC) tại E. Hãy tính AE.

b) Tính diện tích tứ giác ABCD.

Câu 5. Trong một giải cờ vua có 8 kì thủ tham gia, thi đấu vòng tròn một lượt, thắng được 1 điểm, hòa được $\dfrac{1}{2}$ điểm, thua được 0 điểm. Biết rằng sau khi tất cả các trận đấu kết thúc thì cả 8 kì thủ nhận được các số điểm khác nhau và kì thủ xếp thứ hai có số điểm bằng tổng điểm của 4 kì thủ xếp cuối cùng. Hỏi ván đầu giữa kì thủ xếp thứ tư và kì thủ xếp thứ năm đã kết thúc và kết quả như thế nào ?

BÀI GIẢI

Câu 1.

a) $\sqrt{x+1} > 2x - 1$ (1). Điều kiện : $x \ge -1$.

Nếu $x < \dfrac{1}{2} \Rightarrow 2x - 1 < 0 \le \sqrt{x+1}$ và (1) được thỏa mãn.

Xét $x \ge \dfrac{1}{2}$. Khi đó (1) $\Leftrightarrow x + 1 > (2x - 1)^2 \Leftrightarrow 4x^2 - 5x < 0$

$$\Leftrightarrow 4x\left(x - \frac{5}{4}\right) < 0 \Leftrightarrow x - \frac{5}{4} < 0 \text{ (do } x \ge \frac{1}{2}\text{)}.$$

Kết hợp với $x \ge \dfrac{1}{2}$, ta có $\dfrac{1}{2} \le x < \dfrac{5}{4}$.

Vậy nghiệm của bất phương trình là : $-1 \le x < \dfrac{5}{4}$.

b) Điều kiện : $x, y \ne 0$.

$$\begin{cases} x + \dfrac{1}{y} = \dfrac{7}{2} \\ y + \dfrac{1}{x} = \dfrac{7}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{xy + 1}{y} = \dfrac{7}{2} & (1) \\ \dfrac{xy + 1}{x} = \dfrac{7}{3} & (2) \end{cases}$$

Lấy (1) chia (2) vế theo vế, ta được : $\dfrac{x}{y} = \dfrac{3}{2}$.

Hệ đã cho tương đương với : $\begin{cases} x + \dfrac{1}{y} = \dfrac{7}{2} \\ x = \dfrac{3}{2}y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{3}{2}y + \dfrac{1}{y} = \dfrac{7}{2} & (3) \\ x = \dfrac{3}{2}y \end{cases}$

Ta có (3) $\Leftrightarrow \quad 3y^2 - 7y + 2 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad (y - 2)(3y - 1) = 0 \quad \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y = 2 \\ y = \dfrac{1}{3} \end{array}\right.$

Với $y = 2$ thì $x = \dfrac{3}{2}y = 3$.

Với $y = \dfrac{1}{3}$ thì $x = \dfrac{3}{2}y = \dfrac{1}{2}$.

Vậy hệ đã cho có hai nghiệm (x; y) là : (3; 2) và $\left(\dfrac{1}{2}; \dfrac{1}{3}\right)$.

Câu 2. Gọi x_0 là nghiệm chung của các phương trình :

$$x^2 + ax + 1 = 0 \quad \text{và} \quad x^2 + bx + c = 0.$$

Do đó : $\begin{cases} x_0^2 + ax_0 + 1 = 0 \\ x_0^2 + bx_0 + c = 0 \end{cases}$

Suy ra : $(a - b)x_0 + 1 - c = 0 \quad \Rightarrow \quad x_0 = \dfrac{c - 1}{a - b}$ (do $a \neq b$).

Tương tự, nếu gọi x_1 là nghiệm chung của hai phương trình :

$$x^2 + x + a = 0 \quad \text{và} \quad x^2 + cx + b = 0.$$

$\Rightarrow \quad x_1 = \dfrac{a - b}{c - 1}$. Vậy $x_1 = \dfrac{1}{x_0} \neq 0$.

Thay x_1 vào phương trình $x^2 + x + a = 0$, ta được : $\left(\dfrac{1}{x_0}\right)^2 + \dfrac{1}{x_0} + a = 0$

$\Leftrightarrow \quad ax_0^2 + x_0 + 1 = 0$

Lại có $x_0^2 + ax_0 + 1 = 0$.

Trừ hai phương trình trên ta được :

$$(a - 1)(x_0^2 - x_0) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad (a - 1)(x_0 - 1) = 0 \text{ (vì } x_0 \neq 0) \qquad (1)$$

Nếu $a = 1$ thì phương trình : $x^2 + ax + 1 = 0$ (vô nghiệm vì $\Delta = a^2 - 4 = 3$).

Vậy $a \neq 1$. Do vậy (1) $\Leftrightarrow \quad x_0 = 1$.

Suy ra $x_1 = 1$ và $a = -x_1 - x_1^2 = -2$.

Ta có $x_0^2 + bx_0 + c = 0$. Vậy $b + c = -1$. Do đó $a + b + c = -3$.

Câu 3. *(Hình 52a, 52b)*

a) Gọi H là giao điểm của BC với đường cao KE của ΔADK.

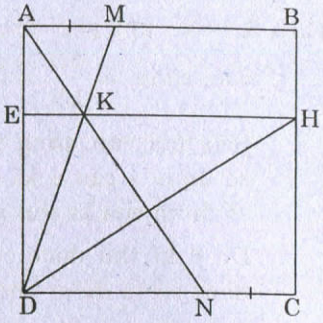
Ta có : $\dfrac{AE}{ED} = \dfrac{AK}{KN} = \dfrac{AM}{DN}$ (vì EK // DC).

Mặt khác $AM = CN = \dfrac{AB}{3}$ nên :

$$DN = DC - CN = AB - \frac{AB}{3} = \frac{2}{3}AB.$$

Do vậy $\dfrac{AM}{DN} = \dfrac{1}{2} = \dfrac{AE}{ED}$. Suy ra :

$$AE = \frac{1}{2}ED; \quad BH = \frac{1}{2}HC; \quad HC = \frac{2}{3}AB.$$



Hình 52a

Vậy H là giao điểm của hai đường cao nên là trực tâm của tam giác ADK và nằm trên BC.

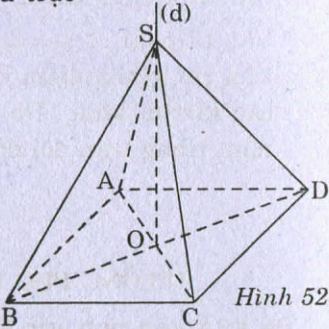
b) Ta có : $AC \perp BD$ (1)

Do $SO \perp (ABCD)$ và $AC \subset (ABCD)$ nên :

$SO \perp AC$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra $AC \perp (SBD)$.

Mặt phẳng (SAC) chứa đường thẳng AC và $AC \perp (SBD)$ nên $(SAC) \perp (SBD)$.



Hình 52b

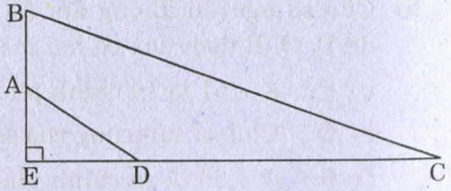
Câu 4. *(Hình 53)*

a) Ta có AB và CD vuông góc với nhau tại E.

Đặt $AE = x$, $ED = y$ $(x, y > 0)$.

Theo định lí Pitago, ta có :

$$\begin{cases} AE^2 + ED^2 = AD^2 \\ EB^2 + EC^2 = BC^2 \end{cases}$$



Hình 53

hay ta có hệ sau : $\begin{cases} x^2 + y^2 = 25 \\ (x + 2)^2 + (y + 8)^2 = 13^2 = 169 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 = 25 \\ x^2 + y^2 + 4x + 16y + 68 = 169 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 = 25 \\ x + 4y = 19 \end{cases}$

Thay $x = 19 - 4y$ vào phương trình đầu, ta được : $(19 - 4y)^2 + y^2 = 25$.

$\Leftrightarrow \quad 17y^2 - 152y + 336 = 0 \quad \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y = 4 \\ y = \dfrac{84}{17} \text{ (loại)} \end{array}\right.$

Với $y = 4$, ta có $x = 19 - 4y = 3$. Vậy $AE = 3$.

b) Ta có :

$$S_{ABCD} = S_{EBC} - S_{AED} = \frac{1}{2}(EB.EC - EA.ED) = \frac{1}{2}[(3 + 2)(4 + 8) - 3.4] = 24$$

Câu 5. Sau khi giải đấu kết thúc, số ván cờ đã thi đấu giữa 4 kì thủ xếp cuối cùng là $\frac{4.3}{1.2} = 6$.

Sau mỗi ván, tổng số điểm của hai kì thủ nhận được là 1. Vì thế tổng số điểm s của 4 kì thủ cuối cùng không ít hơn 6 điểm. Nếu $s \geq 6,5$ thì số điểm của kì thủ xếp thứ hai là $s \geq 6,5$.

Do 8 kì thủ được các số điểm khác nhau nên dễ thấy kì thủ xếp thứ nhất có số điểm không ít hơn $s + 0,5 \geq 7$.

Do kì thủ xếp thứ nhất đấu 7 trận nên điều này chỉ xảy ra khi $s + 0,5 = 7 \Leftrightarrow s = 6,5$ và kì thủ xếp thứ nhất thắng cả 7 ván. Suy ra kì thủ xếp thứ hai thắng không quá 6 ván và có số điểm $\leq 6 < s$, vô lí !

Vậy ta phải có $s = 6$. Điều này có nghĩa là các kì thủ xếp từ năm đến tám chỉ giành điểm khi thi đấu với nhau mà thôi, ngoài ra thua tất cả các kì thủ khác. Do vậy, kì thủ xếp thứ tư đã thắng kì thủ xếp thứ năm trong trận đối đầu trực tiếp.

ĐỀ 35

TRƯỜNG PHỔ THÔNG NĂNG KHIẾU, ĐHQG TPHCM

Đề thi tuyển sinh vào lớp 10 chuyên Toán, Tin năm học 2000 – 2001

Câu 1.

a) Cho số nguyên không âm A. Hãy xác định A biết rằng trong ba mệnh đề P, Q, R dưới đây có hai mệnh đề đúng và một mệnh đề sai :

d) P : "A + 51 là số chính phương".

e) Q : "Chữ số tận cùng của A là 1".

f) R : "A – 38 là số chính phương".

b) Có thể xếp hay không các số 0, 1, 2, ..., 9 lên các đỉnh của một đa giác đều 10 đỉnh sao cho hiệu 2 số trên 2 đỉnh kề nhau bất kì nhận một trong các giá trị –3, –4, –5, 3, 4 hoặc 5.

Câu 2. Giải các hệ phương trình :

a) $\begin{cases} xy = x + 3y \\ yz = 2(2y + z) \\ zx = 3(3z + 2x) \end{cases}$ **b)** $\begin{cases} (x + y + z)^3 = 12t \\ (y + z + t)^3 = 12x \\ (z + t + x)^3 = 12y \\ (t + x + z)^3 = 12z \end{cases}$

Câu 3.

a) Cho 4 số nguyên dương a_1, a_2, a_3, a_4 sao cho $1 \leq a_k \leq k$ với mọi k = 1, 2, 3, 4 và tổng $S = a_1 + a_2 + a_3 + a_4$ là một số chẵn. Chứng minh rằng có ít nhất một trong các số dạng $\pm a_1 \pm a_2 \pm a_3 \pm a_4$ có giá trị bằng 0.

b) Cho 1000 số nguyên dương $a_1, a_2, ..., a_{1000}$ sao cho $1 \leq a_k \leq k$ với mọi k = 1, 2, ..., 1000 và tổng $S = a_1 + a_2 + ... + a_{1000}$ là một số chẵn.

Hỏi trong các số dạng $\pm a_1 \pm a_2 \pm ... \pm a_{1000}$ có số nào bằng 0 hay không? Giải thích vì sao.

Câu 4.

a) Cho góc vuông xAy và đường tròn $(\mathscr{C})$ tâm O tiếp xúc với Ax và Ay lần lượt tại P và Q. d là một tiếp tuyến thay đổi của $(\mathscr{C})$. Gọi a, p, q lần lượt là các khoảng cách từ A, P, Q đến đường thẳng d. Chứng minh khi d thay đổi tỉ số $\frac{a^2}{pq}$ không đổi.

b) Khẳng định trên còn đúng không nếu góc xAy không phải là góc vuông ? Vì sao ?

Câu 5.

a) Cho a, b, c là 3 số không âm thỏa mãn điều kiện :

$$a^2 + b^2 + c^2 \leq 2(ab + bc + ca) \quad (1)$$

Chứng minh bất đẳng thức $(a + b + c) \leq 2(\sqrt{ab} + \sqrt{bc} + \sqrt{ca})$ (2)

Hỏi từ (2) có thể suy ra (1) hay không ? Vì sao ?

b) Cho a, b, c là ba số không âm thỏa mãn điều kiện (1) và p, q, r là ba số thực thỏa mãn : $p + q + r = 0$.

Chứng minh bất đẳng thức : $apq + bqr + crp \leq 0$.

BÀI GIẢI

Câu 1.

a) Hai mệnh đề d) và e) không thể cùng đúng vì nếu ngược lại thì A có chữ số tận cùng là 1 nên A + 51 có chữ số tận cùng là 2. Vì thế A + 51 không thể là số chính phương.

Tương tự hai mệnh đề e) và f) không thể cùng đúng. Do vậy mệnh đề sai là e) và mệnh đề d) và f) là đúng.

Theo giả thiết, ta có $m, n \in N$ sao cho : $\begin{cases} A + 51 = m^2 \\ A - 38 = n^2 \end{cases}$

Do đó $89 = m^2 - n^2 = (m - n)(m + n)$.

Vì 89 là nguyên tố nên : $\begin{cases} m + n = 89 \\ m - n = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = 45 \\ n = 44 \end{cases}$

Vậy $A = m^2 - 51 = 45^2 - 51 = 1974$.

b) Không thể sắp xếp được.

Thật vậy, giả sử xếp được. Khi đó các số 0, 1, 2, 8, 9 không có hai số nào kề nhau.

Vậy khi xếp 5 số trên lên 10 đỉnh của một đa giác đều 10 đỉnh thì chúng được xếp cách đều nhau.

Xét số thứ 7, khi đó số 7 sẽ được xếp vào giữa hai trong năm số 0, 1, 2, 8, 9. Tuy nhiên điều này vi phạm nguyên tắc xếp số của chúng ta vì chỉ có đúng một chứ không phải hai trong 5 số trên có hiệu với 7 là một trong các giá trị –3; –4; –5; 3; 4; 5.

Câu 2.

a) $\begin{cases} xy = x + 3y \\ yz = 2(2y + z) \\ zx = 3(3z + 2x) \end{cases}$

– Nếu x = 0 thì phương trình đầu cho ta y = 0 và phương trình hai cho ta z = 0. Vậy (0; 0; 0) là một nghiệm của hệ phương trình đã cho.

– Xét $xyz \neq 0$. Lấy vế phải chia cho vế trái của từng phương trình ta được :

$\begin{cases} \dfrac{1}{y} + \dfrac{3}{x} = 1 \\ \dfrac{2}{y} + \dfrac{4}{z} = 1 \\ \dfrac{6}{z} + \dfrac{9}{x} = 1 \end{cases}$. Đặt $X = \dfrac{1}{x}$, $Y = \dfrac{1}{y}$, $Z = \dfrac{1}{z}$, ta có : $\begin{cases} 3X + Y = 1 & (1) \\ 2Y + 4Z = 1 & (2) \\ 6Z + 9X = 1 & (3) \end{cases}$

(1) $\Leftrightarrow Y = 1 - 3X$, thay vào (2) ta được : $Z = \dfrac{6X - 1}{4}$.

Thế vào (3), ta được : $\dfrac{6}{4}(6X - 1) + 9X = 1 \Leftrightarrow 72X = 10 \Rightarrow X = \dfrac{5}{36}$.

Do đó : $Y = 1 - 3X = 1 - \dfrac{15}{36} = \dfrac{21}{36}$; $\quad Z = \dfrac{6X - 1}{4} = -\dfrac{1}{24}$.

Với : $X = \dfrac{5}{36}$, ta có : $\dfrac{1}{x} = \dfrac{5}{36} \Rightarrow x = \dfrac{36}{5}$;

$Y = \dfrac{21}{6}$, ta có : $\dfrac{1}{y} = \dfrac{21}{36} \Rightarrow y = \dfrac{36}{21}$;

$Z = -\dfrac{1}{24}$, ta có : $\dfrac{1}{z} = -\dfrac{1}{24} \Rightarrow z = -24$.

Vậy nghiệm của hệ phương trình là : $\left(\dfrac{36}{5}; \dfrac{36}{21}; -24\right)$.

b) Đặt $S = x + y + z + t$.

Phương trình đã cho được viết lại dưới dạng : $\begin{cases} (S - t)^3 = 12t \\ (S - x)^3 = 12x \\ (S - y)^3 = 12y \\ (S - z)^3 = 12z \end{cases}$

Không mất tính tổng quát, giả sử x là số lớn nhất trong các số (x, y, z, t). Khi đó : $12x \geq 12t$, hay $(S - x)^3 \geq (S - t)^3 \Leftrightarrow S - x \geq S - t \Leftrightarrow t \geq x$.

Mà $x \geq t \Rightarrow x = t$.

Tương tự, ta chứng minh được x = y, x = z.

Vậy x = y = z = t.

Từ phương trình đầu, ta có : $(3x)^3 = 12x \Leftrightarrow x(27x^2 - 12) = 0$.

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = \sqrt{\dfrac{12}{27}} \\ x = -\sqrt{\dfrac{12}{27}} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = \dfrac{2}{3} \\ x = -\dfrac{2}{3} \end{array}\right.$$

Vậy hệ đã cho có ba nghiệm là :

$$(0; 0; 0), \left(-\frac{2}{3}; -\frac{2}{3}; -\frac{2}{3}; -\frac{2}{3}\right), \left(\frac{2}{3}; \frac{2}{3}; \frac{2}{3}; \frac{2}{3}\right).$$

Câu 3. Trước hết ta chứng minh mệnh đề tổng quát sau :

Cho n số nguyên dương $a_1, ..., a_n$ sao cho $1 \leq a_k \leq k$ với mọi k = 1, ..., n.

Đặt S_n là tổng $S_n = a_1 + ... + a_n$.

– Nếu S_n chẵn thì với mọi số tự nhiên chẵn $m \leq n + 1$ ta luôn chọn được một số có dạng $\pm a_1 \pm a_2 \pm ... \pm a_n$ sao cho $\pm a_1 \pm a_2 \pm ... \pm a_n = m$.

Khi đó :

1. Chính là trường hợp riêng của mệnh đề với n = 4, S chẵn, m = 0.

2. Chính là trường hợp riêng của mệnh đề với n = 1000, S chẵn, m = 0.

Với n = 1, ta có $S_1 = a_1 = 1$. Khi đó m lẻ $\leq 1 + 1 = 2$ nên m = 1. Do đó $a_1 = m$.

Vậy mệnh đề đúng cho n = 1.

Giả sử mệnh đề đúng cho n. Ta chứng minh đúng với n + 1.

Xét trường hợp S lẻ, n chẵn, a_{n+1} lẻ. Suy ra $S_{n+1} = S_n + a_{n+1}$ chẵn.

Xét số chẵn $M \le (n + 1) + 1 = n + 2$.

Ta phải tìm số $\pm a_1 \pm \dots \pm a_{n+1} = M$.

Do M chẵn và a_{n+1} lẻ nên $M \ne a_{n+1}$.

- *Trường hợp 1* : $M > a_{n+1}$.

Khi đó số lẻ $m = M - a_{n+1} \le M - 1 \le n + 1$.

Theo giả thiết quy nạp, vì S_n lẻ nên có số : $\pm a_1 \pm \dots \pm a_n = m$.

Suy ra $\pm a_1 \pm \dots \pm a_n + a_{n+1} = m + a_{n+1} = M$.

- *Trường hợp 2* : $M < a_{n+1}$.

Khi đó số lẻ $m = a_{n+1} - M \le a_{n+1} \le n + 1$.

Theo giả thiết quy nạp, có số $\pm a_1 \pm \dots \pm a_n = m$.

Suy ra $a_1 \dots \mp a_n = -m = M - a_{n+1}$.

Hay $\mp a_1 \mp \dots \mp a_n + a_{n+1} = M$.

Vậy mệnh đề đúng cho n + 1.

Theo nguyên lí quy nạp toán học, mệnh đề đã được chứng minh.

Câu 4. *(Hình 54a, 54b)*

a) Gọi M là tiếp điểm của d đối với (O).

Gọi A', P', Q' lần lượt là hình chiếu của A, P, Q trên đường thẳng d.

Ta có : AA' // PP' // QQ'.

Theo tính chất tiếp tuyến, ta có : BP = BM; AP = AQ; CQ = CM.

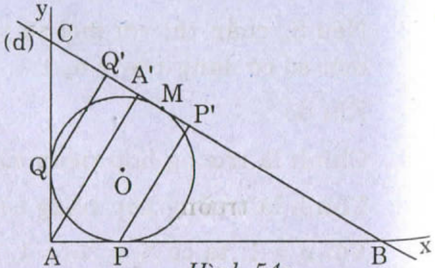
$$\text{Do đó}\quad AB + BC - AC = (BP + AP) + (BM + CM) - (AQ + CQ)$$
$$= (BP + BM) + (AP - AQ) + (CM - CQ) = 2BP.$$

Suy ra $BP = \dfrac{AB + BC - AC}{2}$.

Tương tự : $CQ = \dfrac{AC + BC - AB}{2}$.

Do AA' // PP' nên $\dfrac{AA'}{QQ'} = \dfrac{AB}{BP}$.

Do QQ' // AA' nên $\dfrac{AA'}{QQ'} = \dfrac{AC}{CQ}$.



Hình 54a

Do đó $\dfrac{AA'}{PP'} \cdot \dfrac{AA'}{QQ'} = \dfrac{AB}{BP} \cdot \dfrac{AC}{CQ} \Rightarrow \dfrac{a^2}{p.q} = \dfrac{AB.AC}{BP.CQ}$ (*)

$$\text{Mà}\quad BP.CQ = \frac{AB + BC - AC}{2} \cdot \frac{AC + BC - AB}{2} = \frac{BC^2 - (AB - AC)^2}{4}$$
$$= \frac{BC^2 - AB^2 - AC^2 + 2AB.AC}{4} = \frac{AB.AC}{2}$$

Kết hợp với (*) $\Rightarrow \dfrac{a^2}{p.q} = 2$ không đổi.

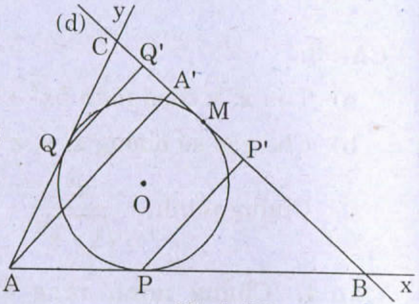
b) Với $\widehat{xAy}$ không là góc vuông ta có :

$$AB^2 + AC^2 - 2AB.AC.\cos\widehat{BAC} = BC^2$$

$$\Rightarrow BC^2 - AB^2 - AC^2 = -2AB.AC.\cos\widehat{ABC}$$

Từ câu (1) ta có :

$$BP.CQ = \frac{1}{2}AB.AC(1 - \cos\widehat{BAC})$$



Hình 54b

Do đó : $\dfrac{a^2}{p.q} = \dfrac{2}{1 - \cos\widehat{BAC}}$ (không đổi).

Câu 5.

a) Vì $a^2 + b^2 + c^2 \le 2(ab + bc + ca)$ nên :

$$a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2bc + 2ca \le 4(ab + bc + ca).$$

Suy ra : $(a + b + c)^2 \le 4(ab + bc + ca) \le \left[2(\sqrt{ab} + \sqrt{bc} + \sqrt{ca})\right]^2$

Do đó $a + b + c \le 2(\sqrt{ab} + \sqrt{bc} + \sqrt{ca})$.

Từ (2) không thể suy ra (1). Vì với a = b = 1; c = 16 thì :

$$a + b + c = 18 = 2(\sqrt{ab} + \sqrt{bc} + \sqrt{ca}),$$

nghĩa là (2) thỏa mãn nhưng (1) không thỏa mãn.

b) $apq + brq + crp \le 0 \Leftrightarrow -r(bq + cp) - apq \ge 0$

$\Leftrightarrow (p + q)(bq + cp) - apq \ge 0 \Leftrightarrow bq^2 + cp^2 + (b + c - a)pq \ge 0$

$\Leftrightarrow (\sqrt{b}|q| - \sqrt{c}|p|)^2 + 2\sqrt{bc}|pq| + (b + c - a)pq \ge 0$ (3)

Từ (1), ta có : $4bc \ge a^2 + b^2 + c^2 - 2ab - 2ac + 2bc = (b + c - a)^2$

Suy ra $2\sqrt{bc} \ge |b + c - a|$.

Do đó $2\sqrt{bc}|pq| \ge |b + c - a|\,|pq| \ge -(b + c - a)pq$.

Suy ra (3) đúng. Vậy $apq + brq + crp \le 0$.

ĐỀ 36

TRƯỜNG PTTH CHUYÊN TRẦN ĐẠI NGHĨA, TPHCM

Đề thi tuyển sinh vào lớp 10 chuyên Toán năm học 2004 – 2005

Câu 1. Cho phương trình : $x^2 + px + 1 = 0$ có 2 nghiệm phân biệt a_1, a_2 và phương trình $x^2 + qx + 1 = 0$ có 2 nghiệm b_1, b_2. Chứng minh :

$$(a_1 - b_1)(a_2 - b_1)(a_1 + b_2)(a_2 + b_2) = q^2 - p^2.$$

Câu 2. Cho các số a, b, c, x, y, z thỏa mãn : $x = by + cz$, $y = ax + cz$, $z = ax + by$, $x + y + z \neq 0$. Chứng minh : $\frac{1}{1+a} + \frac{1}{1+b} + \frac{1}{1+c} = 2.$

Câu 3.

a) Tìm x, y thỏa mãn $5x^2 + 5y^2 + 8xy + 2x - 2y + 2 = 0$.

b) Cho các số dương x, y, z thỏa mãn $x^3 + y^3 + z^3 = 1$.

Chứng minh : $\frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}} + \frac{y^2}{\sqrt{1-y^2}} + \frac{z^2}{\sqrt{1-z^2}} \geq 2.$

Câu 4. Chứng minh rằng không thể có các số nguyên x, y thỏa mãn phương trình : $x^3 - y^3 = 1993$.

Câu 5. Cho tam giác ABC có ba góc nhọn nội tiếp trong đường tròn (O) (AB < AC). Đường tròn tâm O_1 tiếp xúc trong với đường tròn (O) tại M, tiếp xúc với hai cạnh AB, AC lần lượt lại L và K. Gọi E là giao điểm thứ hai của MK với đường tròn (O).

a) Chứng minh ME là tia phân giác của góc AMC.

b) Tia phân giác Mx của góc BMC cắt LK tại I. Chứng minh rằng bốn điểm M, I, K, C cùng thuộc một đường tròn.

c) Chứng minh CI là tia phân giác của góc BAC.

Câu 6. Cho tam giác ABC có đường phân giác trong AD với D thuộc đoạn BC sao cho BD = a và CD = b (a > b). Tiếp tuyến tại A của đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC cắt đường thẳng BC tại E. Tính AE theo a và b.

BÀI GIẢI

Câu 1. Theo định lí Viet, ta có : $a_1 + a_2 = -p$; $a_1a_2 = 1$;

$b_1 + b_2 = -a$; $b_1b_2 = 1$.

$$(a_1 - b_1)(a_2 - b_1)(a_1 + b_2)(a_2 + b_2) =$$

$$= [a_1a_2 - (a_1 + a_2)b_1 + b_1^2][a_1a_2 + (a_1 + a_2)b_2 + b_2^2]$$

$$= (1 + pb_1 + b_1^2)(1 - pb_2 + b_2^2) = (pb_1 - qb_1)(-qb_2 - pb_2)$$

$$= (p - q)b_1(-p - q)b_2 = q^2 - p^2 \quad \text{(đpcm).}$$

Câu 2. Cộng vế với vế các đẳng thức ta được : $x + y + z = 2(ax + by + cz)$.

Do $x + y + z \neq 0$ nên $ax + by + cz \neq 0$.

Cộng hai vế của các đẳng thức lần lượt cho ax, by, cz ta được :

$(a + 1)x = ax + by + cz$; $(b + 1)y = ax + by + cz$; $(c + 1)z = ax + by + cz$.

$$\Rightarrow \frac{1}{1+a} + \frac{1}{1+b} + \frac{1}{1+c} = \frac{x}{ax+by+cz} + \frac{y}{ax+by+cz} + \frac{z}{ax+by+cz}$$

$$= \frac{x+y+z}{ax+by+cz} = 2 \quad \text{(đpcm).}$$

Câu 3.

a) $5x^2 + 5y^2 + 8xy + 2x - 2y + 2 = 4(x + y)^2 + (x + 1)^2 + (y - 1)^2 = 0$

$\Rightarrow \quad x + y = 0, \quad x + 1 = 0, \quad y - 1 = 0 \quad \Rightarrow \quad x = -1, \quad y = 1.$

b) $$\frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{x^3}{x\sqrt{1-x^2}} \geq \frac{x^3}{\frac{x^2 + 1 - x^2}{2}} = 2x^3.$$

Tương tự ta có : $\frac{y^2}{\sqrt{1-y^2}} \geq 2y^3$; $\frac{z^2}{\sqrt{1-z^2}} \geq 2z^3$.

Suy ra : $\frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}} + \frac{y^2}{\sqrt{1-y^2}} + \frac{z^2}{\sqrt{1-z^2}} \geq 2(x^3 + y^3 + z^3) = 2.$

Câu 4. Ta có : $x^3 - y^3 = 1993 \Rightarrow (x - y)(x^2 + xy + y^2) = 1993.$

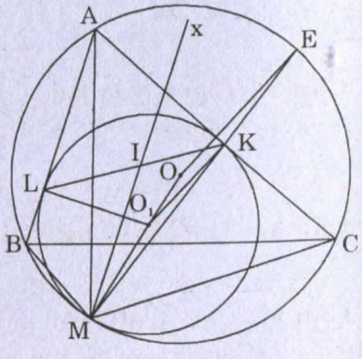
Do $x^2 + xy + y^2 \geq 0$ nên $(x - y)(x^2 + xy + y^2)$ là các ước dương của 1993.

Do 1993 là số nguyên tố, nên ta có các hệ phương trình sau :

$$\begin{cases} x - y = 1 \\ x^2 + xy + y^2 = 1993 \end{cases} \quad \text{và} \quad \begin{cases} x - y = 1993 \\ x^2 + xy + y^2 = 1 \end{cases}$$

Dễ thấy các hệ phương trình trên không có nghiệm nguyên (đpcm).

Câu 5. *(Hình 55)*



Hình 55

a) Ta có $\widehat{O_1KM} = \widehat{O_1MK} \Rightarrow OE // O_1K$.

Mà $O_1K \perp AC$ nên $OE \perp AC$.

Suy ra $\overset{\frown}{AE} = \overset{\frown}{CE}$.

Suy ra ME là tia phân giác của góc AMC.

b) Ta có : $\widehat{IMC} = \frac{\widehat{BMC}}{2} = \frac{180^0 - \widehat{BAC}}{2}$

$= 90^0 - \frac{\widehat{BAC}}{2} = \widehat{AKI}.$

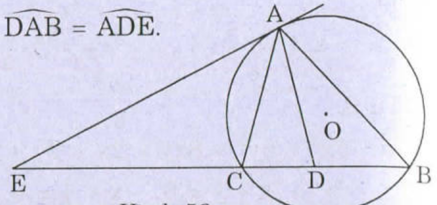
Suy ra tứ giác MIKC nội tiếp.

c) Theo câu b) thì tứ giác MIKC nội tiếp. Suy ra :

$$\widehat{ICK} = 180^0 - \left(\frac{\widehat{ABC}}{2} + 90^0 + \frac{\widehat{BAC}}{2}\right) = \frac{\widehat{BCA}}{2}.$$

Suy ra CI là tia phân giác góc $\widehat{BCA}$.

Câu 6. *(Hình 56).*



Hình 56

Ta có : $\widehat{EAD} = \widehat{EAC} + \widehat{CAD} = \widehat{ABC} + \widehat{DAB} = \widehat{ADE}$.

Suy ra ΔEAD cân tại E

$\Rightarrow EA = ED \quad \Rightarrow EC = EA - b$

và $\quad EB = EA + a$.

Mặt khác ta có :

$$EA^2 = EC.EB \text{ (vì } \Delta EAC \backsim \Delta EBA).$$

Suy ra : $EA^2 = (EA - b)(EA + a) \quad \Rightarrow \quad EA = \dfrac{ab}{a - b}$.

Vậy $\quad EA = \dfrac{ab}{a - b}$.

ĐỀ 37

TRƯỜNG PTTH CHUYÊN TRẦN ĐẠI NGHĨA, TPHCM

Đề thi tuyển sinh vào lớp 10 (Ban A, B) năm học 2004 – 2005

Câu 1. Cho phương trình :

$$x^4 - (3m + 14)x^2 + (4m + 12)(2 - m) = 0 \quad \text{(có ẩn số là x).}$$

a) Định m để phương trình có 4 nghiệm phân biệt.

b) Định m sao cho tích số của 4 nghiệm trên đạt giá trị lớn nhất.

Câu 2. Giải phương trình :

a) $\left|x^2 + |2x + 1| - 1\right| = 2 - x^2$ **b)** $\sqrt{2x + 4} - 2\sqrt{2 - x} = \dfrac{12x - 8}{\sqrt{9x^2 + 16}}$.

Câu 3. Cho x, y là hai số thực khác 0. Chứng minh :

$$\frac{x^2}{y^2} + \frac{y^2}{x^2} + 4 \ge 3\left(\frac{x}{y} + \frac{y}{x}\right).$$

Câu 4. Tìm các số nguyên x, y dương thỏa mãn phương trình :

$$x^2 + xy + y^2 = x^2y^2.$$

Câu 5. Cho ΔABC cân tại A nội tiếp đường tròn (O; R). Vẽ tam giác đều ACD (D và B ở hai nửa mặt phẳng khác nhau có chung bờ AC). Gọi E là giao điểm của BD với đường tròn (O), gọi M là giao điểm của BD với đường cao AH của tam giác ABC.

a) Chứng minh : MADB là một tứ giác nội tiếp.

b) Tính ED theo R.

Câu 6. Cho ΔABC cân tại B nội tiếp đường tròn tâm O. Trên cung AC không chứa điểm B lấy hai điểm M và K theo thứ tự là A, K, M, C. Các đoạn thẳng AM và BK cắt nhau tại E, còn các đoạn thẳng KC và BM cắt nhau tại D. Chứng minh ED song song với AC.

BÀI GIẢI

Câu 1.

a) $x^4 - (3m + 14)x^2 + (4m + 12)(2 - m) = 0 \qquad (*)$

Đặt $t = x^2$

$$(*) \Leftrightarrow t^2 - (3m + 14)t + (4m + 12)(2 - m) = 0 \quad (**) \quad \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = 4m + 12 \\ t = 2 - m \end{array}\right.$$

$$(*) \text{ có 4 nghiệm phân biệt} \quad \Leftrightarrow \begin{cases} 4m + 12 > 0 \\ 2 - m > 0 \\ 4m + 12 \ne 2 - m \end{cases} \quad \Leftrightarrow \begin{cases} -3 < m < 2 \\ m \ne -2 \end{cases}$$

b) Ta có 4 nghiệm của (*) là : $\pm\sqrt{t_1}$, $\pm\sqrt{t_2}$ với t_1, t_2 là nghiệm của (**).

$$x_1.x_2.x_3.x_4 = t_1.t_2 = (4m + 12)(2 - m) = -(2m + 1)^2 + 25 \le 25 \ \forall m.$$

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow m = -\dfrac{1}{2}$.

Vậy giá trị lớn nhất của $x_1.x_2.x_3.x_4$ là 25, đạt được khi $m = -\dfrac{1}{2}$.

Câu 2.

$$\textbf{a)} \ \left|x^2 + |2x + 1| - 1\right| = 2 - x^2 \quad \Leftrightarrow \begin{cases} 2 - x^2 \le 0 \\ \left[\begin{array}{l} x^2 + |2x + 1| - 1 = 2 - x^2 \\ x^2 + |2x + 1| - 1 = x^2 - 2 \end{array}\right. \end{cases}$$

$$\text{Giải các hệ : } \begin{cases} |2x + 1| = 3 - 2x^2 \\ x^2 \le 2 \end{cases} \ (*), \quad \begin{cases} |2x + 1| = -1 \\ x^2 \le 2 \end{cases} \text{ (vô nghiệm)}$$

$$(*) \Leftrightarrow \begin{cases} 3 - 2x^2 \ge 0 \\ x^2 \le 2 \\ \left[\begin{array}{l} 2x + 1 = 3 - 2x^2 \\ 2x + 1 = 2x^2 - 3 \end{array}\right. \end{cases} \quad \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 \ge \dfrac{3}{2} \\ \left[\begin{array}{l} 2x^2 + 2x - 2 = 0 \\ 2x^2 - 2x - 4 = 0 \end{array}\right. \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 \le \dfrac{3}{2} \\ \left[\begin{array}{l} x = \dfrac{-1 \pm \sqrt{5}}{2} \\ x = -1 \\ x = 2 \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -1 \\ x = \dfrac{-1 + \sqrt{5}}{2} \end{array}\right.$$

b) Điều kiện : $-2 \le x \le 2$. Phương trình đã cho được viết dưới dạng :

$$\frac{6x - 4}{\sqrt{2x + 4} + 2\sqrt{2 - x}} = \frac{12x - 8}{\sqrt{9x^2 + 16}}$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} x = \dfrac{2}{3} & (1) \\ 2(\sqrt{2x + 4} + 2\sqrt{2 - x}) = \sqrt{9x^2 + 16} & (2) \end{array}\right.$$

$$(2) \Leftrightarrow \quad 4(2x + 4) + 16(2 - x) + 16\sqrt{8 - 2x^2} = 9x^2 + 16$$

$$\Leftrightarrow \quad 16\sqrt{8 - 2x^2} - 8x = 9x^2 - 32 \quad \Leftrightarrow \quad 8(2\sqrt{8 - 2x^2} - x) = 9x^2 - 32$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{8(32 - 9x^2)}{2\sqrt{8 - 2x^2} + x} = 9x^2 - 32 \quad \Leftrightarrow \quad \left[\begin{array}{l} 9x^2 - 32 = 0 \\ 2\sqrt{8 - 2x^2} + x = -8 \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \pm\dfrac{4\sqrt{2}}{3} \\ 2\sqrt{8 - 2x^2} = -8 - x \quad \text{(vô nghiệm vì } -2 \le x \le 2) \end{array}\right.$$

Thử lại ta chọn $x = \dfrac{4\sqrt{2}}{3}$.

Vậy phương trình có nghiệm là $x = \dfrac{2}{3}$, $x = \dfrac{4\sqrt{2}}{3}$.

Câu 3. Đặt $t = \dfrac{x}{y} + \dfrac{y}{x} \Rightarrow |t| = \left|\dfrac{x}{y} + \dfrac{y}{x}\right| = \left|\dfrac{x}{y}\right| + \left|\dfrac{y}{x}\right|$.

Mà $\left|\dfrac{x}{y}\right| + \left|\dfrac{y}{x}\right| \ge 2$ (bất đẳng thức Côsi)

Suy ra $|t| \ge 2 \Rightarrow t \le -2$ hay $t \ge 2$.

Khi đó $t^2 = \dfrac{x^2}{y^2} + \dfrac{y^2}{x^2} + 2$. Bất đẳng thức đã cho tương đương với :

$$t^2 + 2 \ge 3t \quad \Leftrightarrow \quad (t - 1)(t - 2) \ge 0 \quad (*)$$

(*) đúng vì $t \le -2$ hay $t \ge 2$.

Vậy bất đẳng thức đã cho đúng (đpcm).

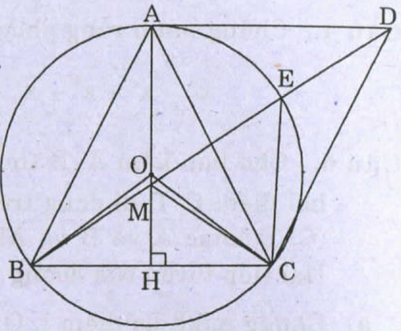
Câu 4. $x^2 + xy + y^2 = x^2y^2 \Leftrightarrow (2x + 2y)^2 = (2xy + 1)^2 - 1$

$\Leftrightarrow (2xy + 1 + 2x + 2y)(2xy + 1 - 2x - 2y) = 1$

$\Leftrightarrow 2xy + 1 + 2x + 2y = 2xy + 1 - 2x - 2y \Leftrightarrow x + y = 0.$

Thay vào phương trình ban đầu ta có các cặp số $(x; y)$ là $(0; 0)$ hoặc $(1; -1)$ hoặc $(-1; 1)$.

Câu 5. *(Hình 57)*



Hình 57

a) Dễ dàng chứng minh được $\widehat{ABM} = \widehat{ACM}$.

Mà $\widehat{ABM} = \widehat{ADM} \Rightarrow \widehat{ACM} = \widehat{ADM}$.

Suy ra MADC là tứ giác nội tiếp.

b) Ta có $\widehat{EDC} = \widehat{OAC} = \widehat{OAB}$.

$\widehat{DCE} = 60^0 - \widehat{ECA} = 60^0 - \widehat{ABE}$

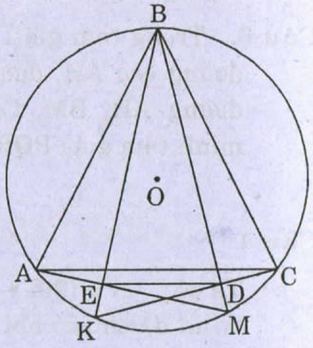
$= \widehat{BMH} - \widehat{ABM}$

$= \widehat{OAB} = \widehat{OBA}$.

Suy ra tam giác OAB bằng tam giác EDC

$\Rightarrow ED = OA = R$.

Câu 6. *(Hình 58)*



Hình 58

Ta có $\widehat{BKC} = \widehat{BAC} = \widehat{BCA} = \widehat{BMA}$.

Nên tứ giác EDMK nội tiếp.

Suy ra $\widehat{EDK} = \widehat{EMK}$.

Mà $\widehat{EMK} = \widehat{ACK} \Rightarrow \widehat{EDK} = \widehat{ACK}$.

Suy ra ED // AC.

ĐỀ 38

TRƯỜNG PTTH CHUYÊN TRẦN ĐẠI NGHĨA, TPHCM

Đề thi tuyển sinh vào lớp 10 (Ban A, B) năm học 2003 – 2004

Câu 1. Cho phương trình : $x^2 - (2m + 3)x + m - 3 = 0$ (có ẩn số là x).

a) Chứng tỏ rằng phương trình luôn luôn có nghiệm.

b) Gọi x_1, x_2 là các nghiệm của phương trình trên. Tìm m để $|x_1 - x_2|$ đạt giá trị nhỏ nhất. Tính giá trị nhỏ nhất ấy.

Câu 2.

a) Cho $x < 0$, $y < 0$. Chứng minh :

$$\left|\sqrt{xy} - \frac{x+y}{2}\right| + \left|\frac{x+y}{2} + \sqrt{xy}\right| = |x| + |y|.$$

b) Cho $\sqrt{1+x} + \sqrt{1+y} = 2\sqrt{1+a}$. Chứng minh : $x + y \geq 2a$.

Câu 3. Giải các phương trình và hệ phương trình :

a) $x^4 - 4x^3 - 19x^2 + 106x - 120 = 0$. **b)** $\begin{cases} x^2 + y^2 + xy = 7 \\ x^4 + y^4 + x^2y^2 = 21. \end{cases}$

Câu 4. Chứng minh rằng phương trình :

$$x^6 - x^5 + x^4 - x^3 + x^2 - x + \frac{3}{4} = 0 \text{ vô nghiệm.}$$

Câu 5. Cho hai điểm A, B thuộc đường tròn (O) (AB không đi qua O) và có hai điểm C, D di động trên cung lớn $\overset{\frown}{AB}$ sao cho AD song song với BC (C, D khác A và B và AD > BC). Gọi M là giao điểm của BD và AC. Hai tiếp tuyến của đường tròn (O) tại A và D cắt nhau tại điểm I.

a) Chứng minh ba điểm I, O, M thẳng hàng.

b) Chứng minh bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác MCD không đổi.

Câu 6. Trong tam giác ABC không là tam giác đều và có ba góc đều nhọn, đường cao AH, đường trung tuyến BM, đường phân giác trong CE. Ba đường AH, BM, CE cắt nhau tạo thành một tam giác PQR. Chứng minh tam giác PQR không thể là tam giác đều.

BÀI GIẢI

Câu 1.

a) Ta có : $\Delta = (2m+3)^2 - 4(m-3) = 4(m+1)^2 + 17 > 0\ \forall m$, nên phương trình đã cho có hai nghiệm phân biệt.

b) Theo định lí Viet ta có : $\begin{cases} x_1 + x_2 = 2m + 3 \\ x_1x_2 = m - 3 \end{cases}$

Mặt khác $(x_1 - x_2)^2 = (x_1 + x_2)^2 - 4x_1x_2 = (2m+3)^2 - 4(m-3)$
$= 4(m+1)^2 + 17 \geq 17.$

Suy ra $|x_1 - x_2| \geq \sqrt{17}$.

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow$ $m = -1$.

Vậy giá trị nhỏ nhất của $|x_1 - x_2|$ là $\sqrt{17}$, đạt được khi và chỉ khi $m = -1$.

Câu 2. Để ý đến bất đẳng thức : $\dfrac{(x+y)^2}{2} - xy \geq 0$, với mọi x, y ta có :

$$\left[\left|\sqrt{xy} - \left(\frac{x+y}{2}\right)\right| + \left|\left(\frac{x+y}{2} + \sqrt{xy}\right)\right|\right]^2 = \left[xy - (x+y)\sqrt{xy} + \left(\frac{x+y}{2}\right)^2\right] +$$

$$+\left[\left(\frac{x+y}{2}\right)^2 + (x+y)\sqrt{xy} + xy\right] + 2\left|xy - \frac{(x+y)^2}{4}\right| =$$

$$= 2xy + 2\left(\frac{x+y}{2}\right)^2 + 2\left[\left(\frac{x+y}{2}\right)^2 - xy\right] = (x+y)^2 \quad (1)$$

Theo giả thiết $x < 0$, $y < 0$ nên : $(|x| + |y|)^2 = (-x-y)^2 = (x+y)^2$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra : $\left[\left|\sqrt{xy} - \left(\frac{x+y}{2}\right)\right| + \left|\left(\frac{x+y}{2} + \sqrt{xy}\right)\right|\right]^2 = (|x| + |y|)^2$.

Vậy $\left|\sqrt{xy} - \left(\frac{x+y}{2}\right)\right| + \left|\left(\frac{x+y}{2}\right) + \sqrt{xy}\right| = |x| + |y|$ (đpcm).

b) Nhận xét rằng với mọi số thực u, v ta có $u^2 + v^2 \geq \frac{1}{2}(u+v)^2$.

Áp dụng bất đẳng thức này ta có :

$$(\sqrt{1+x})^2 + (\sqrt{1+y})^2 \geq \frac{1}{2}(\sqrt{1+x} + \sqrt{1+y})^2.$$

Suy ra $2 + x + y \geq 2(1+a)$ hay $x + y \geq 2a$.

Câu 3.

a) $x^4 - 4x^3 - 19x^2 + 106x - 120 = 0$

$\Leftrightarrow$ $x^4 - 5x^3 + 6x^2 + x^3 - 5x^2 + 6x - 20x^2 + 100x - 120 = 0$

$\Leftrightarrow$ $x^2(x^2 - 5x + 6) + x(x^2 - 5x + 6) - 20(x^2 - 5 + 6) = 0$

$\Leftrightarrow$ $(x^2 - 5x + 6)(x^2 + x - 20) = 0$ $\Leftrightarrow$ $\left[\begin{array}{l} x^2 - 5x + 6 = 0 \\ x^2 + x - 20 = 0 \end{array}\right.$

Giải ra ta được các nghiệm $x_1 = 2$, $x_2 = 3$, $x_3 = 4$, $x_4 = -5$.

b) $\begin{cases} x^2 + y^2 + xy = 7 \\ x^4 + y^4 + x^2y^2 = 21 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 = 7 - xy \\ (x^2 + y^2)^2 - x^2y^2 = 21 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 = 7 - xy \\ (7 - xy)^2 - x^2y^2 = 21 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 = 5 \\ xy = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 = 5 \\ x^2y^2 = 4 \end{cases}$

Giải ra ta được nghiệm (x; y) của hệ là (1; 2), (–1; –2), (2; 1), (–2; –1).

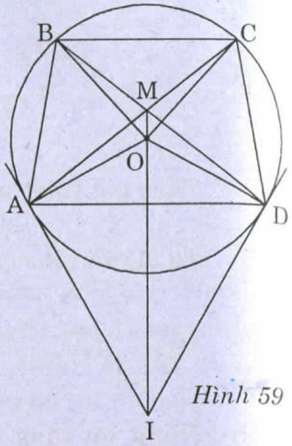
Câu 4. $x^6 - x^5 + x^4 - x^3 + x^2 - x + \frac{3}{4} = 0$

$\Leftrightarrow$ $\frac{1}{4}x^6 + \left(\frac{1}{2}x^6 - x^3 + \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{4}x^6 - x^5 + x^4\right) + \left(x^2 - x + \frac{1}{4}\right) = 0$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{1}{4}x^6 + \frac{1}{2}(x^3 - 1)^2 + \left(\frac{1}{2}x^3 - x^2\right)^2 + \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 = 0 \qquad (*)$$

Nhận thấy (*) vô nghiệm, nên phương trình đã cho vô nghiệm.

Câu 5. *(Hình 59)*



Hình 59

a) Tứ giác ABCD là hình thang cân nên có MA = MD. Mặt khác OA = OD và IA = ID, suy ra I, M, O nằm trên đường trung trực của đoạn AD hay I, M, O thẳng hàng.

b) Ta có $\widehat{CMD} = 2\widehat{CAD}$ (do ΔMAD cân tại M).

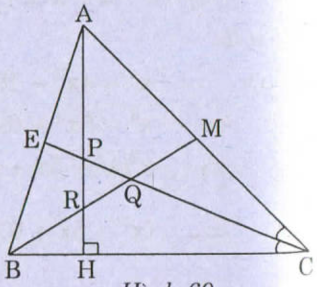
Mà $\widehat{COD} = 2\widehat{CAD}$ (góc nội tiếp bằng nửa góc ở tâm cùng chắn một cung).

Suy ra bốn điểm C, M, O, D cùng nằm trên một đường tròn, nghĩa là đường tròn ngoại tiếp tam giác MOD cũng là đường tròn ngoại tiếp tam giác COD (1)

Mặt khác vì ΔCOD = ΔBOA nên đường tròn ngoại tiếp ΔCOD có bán kính bằng bán kính đường tròn ngoại tiếp ΔBOA. (2)

Từ (1) và (2), suy ra bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác MCD bằng bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác BAO.

Câu 6. *(Hình 60)*



Hình 60

Giả sử tam giác PQR đều, ta có :

$\widehat{PCH} = 30^0 \Rightarrow \widehat{ACB} = 60^0$ (1)

Do $\widehat{PCH} = 30^0$, $\widehat{MQC} = 60^0$

nên $\widehat{QMC} = 90^0$, hay BM ⊥ AC (2)

Từ (1) và (2), suy ra ΔABC đều (trái với gt).

Vậy tam giác PQR không thể là tam giác đều.

ĐỀ 39

TRƯỜNG PTTH CHUYÊN TRẦN ĐẠI NGHĨA, TPHCM

Đề thi tuyển sinh vào lớp 10 chuyên toán năm học 2003 – 2004

Câu 1. Giải các phương trình :

a) $(6x + 7)^2(3x + 4)(x + 1) = 6.$ **b)** $4(x + 5)(x + 6)(x + 10)(x + 12) = 3x^2.$

Câu 2. Cho x ≥ 0, y ≥ 0, z ≥ 0 thỏa mãn : $\begin{cases} 4x + y + 2z = 4 \\ 3x + 6y - 2z = 6 \end{cases}$

Tìm giá trị nhỏ nhất và lớn nhất của A = 5x – 6y + 7z.

Câu 3. Phân tích thành nhân tử : $A = (x - y)^5 + (y - z)^5 + (z - x)^5.$

Câu 4. Cho phương trình : $x^2 + px + q = 0.$

a) Chứng minh rằng nếu $2p^2 - 9q = 0$ thì phương trình có hai nghiệm và nghiệm này gấp đôi nghiệm kia.

b) Cho p, q là các số nguyên. Chứng minh rằng nếu phương trình có nghiệm hữu tỉ thì nghiệm ấy phải là số nguyên.

Câu 5. Cho tam giác đều ABC có cạnh bằng a. Hai điểm M, N lần lượt di động trên hai đoạn AB, AC sao cho $\dfrac{AM}{MB} + \dfrac{AN}{NC} = 1$. Đặt AM = x và AN = y.

a) Chứng minh $MN^2 = x^2 + y^2 - xy.$

b) Chứng minh MN = a – x – y.

c) Chứng tỏ rằng MN luôn luôn tiếp xúc với đường tròn nội tiếp ΔABC.

Câu 6. Cho góc xOy cố định. Có hai điểm M, N lần lượt di động trên hai tia Ox, Oy sao cho OM + ON = 2k (k là hằng số dương). Trung điểm I của MN di động trên đường cố định nào ?

BÀI GIẢI

Câu 1.

a) $(6x + 7)^2(3x + 4)(x + 1) = 6 \Leftrightarrow (36x^2 + 84x + 49)(3x^2 + 7x + 4) = 6$

$$\Leftrightarrow 12\left(3x^2 + 7x + \frac{49}{12}\right)(3x^2 + 7x + 4) = 6 \quad (*)$$

Đặt $t = 3x^2 + 7x + 4.$

(*) được viết lại dưới dạng : $2\left(t + \dfrac{1}{12}\right)t = 1 \Leftrightarrow 2t^2 + \dfrac{1}{6}t - 1 = 0$

$$\Leftrightarrow 12t^2 + t - 6 = 0 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} t = \dfrac{2}{3} \\ t = -\dfrac{3}{4} \end{array}\right.$$

– Với $t = \dfrac{2}{3}$, ta có : $3x^2 + 7x + 4 = \dfrac{2}{3} \Leftrightarrow 3x^2 + 7x + \dfrac{10}{3} = 0$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1 = -\dfrac{2}{3} \\ x_2 = -\dfrac{5}{3} \end{cases}$$

– Với $t = -\dfrac{3}{4}$, ta có : $3x^2 + 7x + 4 = -\dfrac{3}{4} \Leftrightarrow 3x^2 + 7x + \dfrac{19}{4} = 0$

(vô nghiệm)

Vậy nghiệm của phương trình đã cho là : $x_1 = -\dfrac{2}{3}$; $x_2 = -\dfrac{5}{3}$.

b) $4(x + 5)(x + 6)(x + 10)(x + 12) = 3x^2$

$\Leftrightarrow \quad 4(x^2 + 17x + 60)(x^2 + 16x + 60) = 3x^2$

Đặt $t = x^2 + 16x + 60$, ta có : $4(t + x)t = 3x^2 \quad \Leftrightarrow \quad 4t^2 + 4tx - 3x^2 = 0$

$$\Leftrightarrow \quad (2t - x)(2t + 3x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \left[\begin{array}{l} t = \dfrac{x}{2} \\ t = -\dfrac{3x}{2} \end{array}\right.$$

Với $t = \dfrac{x}{2}$, ta có : $\quad x^2 + 16x + 60 = \dfrac{x}{2}$

$$\Leftrightarrow \quad 2x^2 + 31x + 120 = 0 \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} x_1 = -\dfrac{15}{2} \\ x_2 = -8 \end{cases}$$

Với $t = -\dfrac{3x}{2}$, ta có : $\quad x^2 + 16x + 60 = -\dfrac{3x}{2}$

$$\Leftrightarrow \quad 2x^2 + 35x + 120 = 0 \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} x_3 = \dfrac{-35 + \sqrt{256}}{4} \\ x_4 = \dfrac{-35 - \sqrt{256}}{4} \end{cases}$$

Vậy phương trình đã cho có 4 nghiệm là :

$$x_1 = -\frac{15}{2}; \quad x_2 = -8; \quad x_3 = \frac{-35 + \sqrt{256}}{4}; \quad x_4 = \frac{-35 - \sqrt{256}}{4}.$$

Câu 2. x, y, $z \geq 0$ thỏa mãn hệ : $\begin{cases} 4x + y + 2z = 4 \\ 3x + 6y - 2z = 6 \end{cases}$

Suy ra : $x = \dfrac{18 - 14z}{21}; \quad y = \dfrac{12 + 12z}{21}$.

Vì $x \geq 0$ nên $z \leq \dfrac{18}{4} = \dfrac{9}{7}$. $\quad$ Ta có : $0 \leq x \leq \dfrac{9}{7}$.

$$A = 5\left(\frac{18 - 14z}{21}\right) - 6\left(\frac{12 + 14z}{21}\right) + 7z = \frac{18 - 7z}{21}$$

Vì $0 \leq z \leq \dfrac{9}{7}$, nên $-\dfrac{3}{7} \leq A \leq \dfrac{6}{7}$.

Vậy :

- Giá trị lớn nhất của A là $\dfrac{6}{7}$, đạt được khi và chỉ khi $x = 0$; $z = \dfrac{9}{7}$; $y = \dfrac{30}{21}$.
- Giá trị nhỏ nhất của A là $-\dfrac{3}{7}$, đạt được khi $x = \dfrac{18}{21}$, $z = 0$, $y = \dfrac{12}{21}$.

Câu 3. $A = (x - y)^5 + (y - z)^5 + (z - x)^5$

Đặt $\quad a = x - y; \quad b = y - z.$

Suy ra $\quad z - x = -(a + b).$

Ta có :
$$\begin{aligned} A &= a^5 + b^5 - (a + b)^5 = (a + b)(a^4 - a^3b + a^2b^2 - ab^3 + b^4) - (a + b)^5 \\ &= (a + b)[-5a^3b - 5a^2b^2 - 5ab^3] = -5(a + b)(a^3b + a^2b + ab^3) \\ &= -5(a + b)(ab)(a^2 + ab + b^2) \\ &= 5(x - y)(y - z)(z - x)(x^2 + y^2 - xy - yz - zx) \end{aligned}$$

Vậy $\quad A = 5(x - y)(y - z)(z - x)(x^2 + y^2 - xy - yz - zx).$

Câu 4.

a) Với $\quad 2p^2 - 9q = 0 \quad \Rightarrow \quad q = \dfrac{2}{9}p^2.$

$$\Delta = p^2 - 4q = p^2 - \frac{8p^2}{9} = \frac{p^2}{9} \geq 0$$

$x_1 = -\dfrac{p}{3}; \quad x_2 = -\dfrac{2p}{3}. \qquad$ Vậy $x_2 = 2x_1$ (đpcm).

b) Gọi $\dfrac{a}{b}$ là nghiệm hữu tỉ của phương trình ở dạng tối giản (a, b nguyên tố cùng nhau).

- Nếu $b = \pm 1$ thì $\dfrac{a}{b}$ là nguyên (đpcm).
- Nếu $b \neq \pm 1$ thì $b = kd'$ (k là ước nguyên tố của b)

Ta có : $\dfrac{a^2}{b^2} + p\dfrac{a}{b} + q = 0 \quad \Leftrightarrow \quad a^2 + pba + qb^2 = 0$

$$\Rightarrow \quad a^2 = -b(pa + qb) = -kd'(pa + qb).$$

Nên k là ước của $a^2 \Rightarrow$ k là ước của a mâu thuẫn với $\dfrac{a}{b}$, tối giản (đpcm).

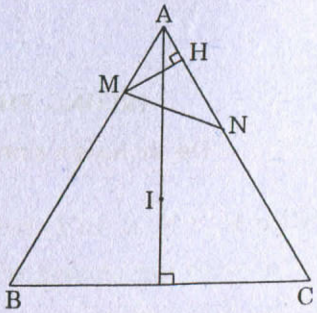
Câu 5. *(Hình 61)*

a) Vẽ $MH \perp AB$

Tam giác vuông MAH có góc $\widehat{A} = 60^0$ nên là nửa tam giác đều, ta có :

$$AH = \frac{x}{2}; \quad MH = \frac{x\sqrt{3}}{2}.$$

Suy ra $\quad NH = y - \dfrac{x}{2}.$



Hình 61

$$MN^2 = MH^2 + HN^2 = \frac{3x^2}{4} + y^2 - xy + \frac{x^2}{4} = x^2 + y^2 - xy \text{ (đpcm).}$$

b) Ta có : $MB = a - x$; $NC = a - y$.

Từ giả thiết $\frac{AM}{MB} + \frac{AN}{NC} = 1 \Rightarrow \frac{x}{a-x} + \frac{y}{a-y} = 1$

$\Leftrightarrow ax - xy + ay - xy = a^2 - a(x+y) + xy \Leftrightarrow 2a(x+y) - a^2 = 3xy$

Do câu a), ta có : $MN^2 = (x+y)^2 - 3xy$

Nên $MN^2 = (x+y)^2 - 2a(x+y) + a^2 = (x+y-a)^2$

Suy ra $MN = |x + y - a|$.

Vì $\frac{AM}{MB} \le 1$ nên $AM \le \frac{AB}{2} \Rightarrow x = \frac{a}{2}$. Tương tự, ta có : $y \le \frac{a}{2}$.

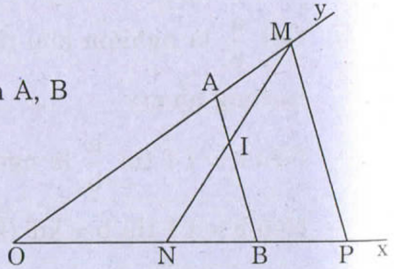
Vậy $MN = a - x - y$ (đpcm).

c) Từ kết quả câu b) thì

$$MN + BC = a - x - y + a = AB - AM + AC - AN = BM + CN.$$

Suy ra tứ giác BMNC ngoại tiếp đường tròn (O) hay MN tiếp xúc với đường tròn nội tiếp ΔABC (đpcm).

Câu 6. *(Hình 62)*



Hình 62

Trên hai tia Ox, Oy lần lượt lấy hai điểm A, B sao cho OA = OB = k.

Suy ra A, B cố định và ΔAOB cân tại O.

Vì OA + OB = OM + ON = 2k,

nên AM = BN.

Lấy điểm P trên Oy sao cho B là trung điểm của NP. Ta có ΔMPO cân tại O, suy ra MP // AB.

Tam giác NMP có AB // MP và B là trung điểm NP nên AB chứa đường trung bình của tam giác MNP ⇒ AB đi qua trung điểm I của MN.

Vậy I luôn luôn di động trên đường AB cố định.

ĐỀ 40

TRƯỜNG PHỔ THÔNG NĂNG KHIẾU, ĐHQG TPHCM

Đề thi tuyển sinh vào lớp 10 (Ban A, B) năm học 2000 – 2001

Câu 1. Cho x_1 và x_2 là hai nghiệm của phương trình : $x^2 - 7x - 3 = 0$

a) Hãy lập phương trình bậc hai có nghiệm là $2x_1 - x_2$ và $2x_1 - x_1$.

b) Hãy tính giá trị của biểu thức $A = |2x_1 - x_2| + |2x_2 - x_1|$.

Câu 2. Giải hệ phương trình :

a) $\begin{cases} x - 2y = 6 \\ xy = 8 \end{cases}$

b) $\begin{cases} x + y = z^2 \\ x = 2(y + z) \\ xy = 2(z + 1) \end{cases}$

Câu 3.

a) Giải phương trình : $\sqrt{x} + \sqrt{x+1} = \frac{1}{\sqrt{x}}$.

b) Gọi α, β là số đo mỗi góc trong của hai đa giác đều có số cạnh lần lượt là m và n. Tìm m và n nếu $\frac{\alpha}{\beta} = \frac{5}{7}$.

Câu 4. Cho tam giác ABC có đường cao BD. Giả sử (O) là một đường tròn có tâm O nên trên đoạn AC và lần lượt tiếp xúc với BA, BC tại M và N.

a) Chứng minh rằng bốn điểm B, M, D, N nằm trên một đường tròn.

b) Chứng minh rằng $\widehat{ADM} = \widehat{CDN}$.

Câu 5. Trong một giải bóng đá có 10 đội bóng thi đấu vòng tròn một lượt. Trong mỗi trận, đội thắng được 3 điểm, đội hòa được 1 điểm và đội thua không có điểm. Các đội có cùng số điểm sẽ được xếp hạng theo các chỉ số phụ nào đó.

a) Gọi A là một đội bóng tham dự giải, hỏi đội bóng A có thể đạt được những điểm số nào.

b) Giả sử đội bóng A được xếp thứ nhì khi kết thúc giải. Tìm số điểm tối đa, số điểm tối thiểu mà đội bóng A có thể đạt được.

BÀI GIẢI

Câu 1.

a) Vì $\Delta = 49 - 12 = 37 > 0$ nên phương trình có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2.

Theo định lí Viet ta có : $\begin{cases} x_1 + x_2 = 7 \\ x_1x_2 = 3 \end{cases}$

Ta có : $S = 2x_1 - x_2 + 2x_2 - x_1 = x_1 + x_2 = 7$

$$P = (2x_1 - x_2)(2x_2 - x_1) = 4x_1x_2 - 2x_1^2 - 2x_2^2 + x_1x_2$$
$$= -2(x_1^2 + x_2^2) + 5x_1x_2 = -2[(x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2] + 5x_1x_2$$
$$= -2(x_1 + x_2)^2 + 9x_1x_2 = -2.7^2 + 9.3 = -71.$$

Do đó $y_1 = 2x_1 - x_2$; $y_2 = 2x_2 - x_1$ là nghiệm của phương trình :

$$y^2 - 7y - 71 = 0.$$

b) $A = |2x_1 - x_2| + |2x_2 - x_1|$

Theo câu a), ta có :

$$A^2 = (|y_1| + |y_2|)^2 = y_1^2 + 2|y_1||y_2| + y_2^2 = y_1^2 + y_2^2 + 2|y_1y_2|$$

$$= (y_1 + y_2)^2 - 2y_1y_2 + 2|y_1y_2| = 7^2 - 2.(-71) + 2|-71| = 333$$

Vì $A \ge 0$, suy ra $A = \sqrt{333}$.

Câu 2.

a) $$\begin{cases} x - 2y = 6 \\ xy = 8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 6 + 2y \\ (6 + 2y)y = 8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 6 + 2y \\ 6y + 2y^2 = 8 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 6 + 2y \\ 2y^2 + 6y - 8 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 8;\ y = 1 \\ x = -2;\ y = -4 \end{array}\right.$$

Vậy nghiệm của hệ phương trình đã cho là : (8; 1), (-2; -4).

b) $$\begin{cases} x + y = z^2 & (1) \\ x = 2(y + z) & (2) \\ xy = 2(z + 1) & (3) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + y = z^2 \\ x = 2(y + z) \\ x - xy = 2(y + z) - 2(z + 1) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x + y = z^2 \\ x = 2(y + z) \\ x(1 - y) = 2y + 2z - 2z - 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + y = z^2 \\ x = 2(y + z) \\ x(1 - y) = 2(y - 1) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + y = z^2 \\ x = 2(y + z) \\ (1 - y)(x + 2) = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x + y = z^2 \\ x = 2(y + z) \\ \left[\begin{array}{l} x + 2 = 0 \\ 1 - y = 0 \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x + y = z^2 \\ x = 2(y + z) \\ x = -2 \end{cases} \\ \begin{cases} x + y = z^2 \\ x = 2(y + z) \\ y = 1 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} z^2 + z = -3 \\ y + z = -1 \\ x = -2 \end{cases} \\ \begin{cases} z^2 - 2(1 + z) = 1 \\ x = 2(1 + z) \\ y = 1 \end{cases} \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} z^2 + z + 3 = 0 \text{ (vô nghiệm)} \\ y + z = -1 \\ x = -2 \end{cases} \\ \begin{cases} z^2 - 2z - 3 = 0 \\ x = 2(1 + z) \\ y = 1 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \begin{cases} z = -1;\ z = 3 \\ x = 2(1 + z) \\ y = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x = 0 \\ y = 1 \\ z = -1 \end{cases} \\ \begin{cases} x = 8 \\ y = 1 \\ z = 3 \end{cases} \end{array}\right.$$

Vậy hệ phương trình có hai nghiệm là : (0; 1; -1), (8; 1; 3).

Câu 3.

a) Điều kiện : $x > 0$.

Ta có : $$\sqrt{x} + \sqrt{x + 1} = \frac{1}{\sqrt{x}} \Leftrightarrow x + \sqrt{x(x + 1)} = 1$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{x(x + 1)} = 1 - x \Leftrightarrow \begin{cases} 1 - x \ge 0 \\ x(x + 1) = 1 - x^2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \le 1 \\ x^2 + x = 1 - 2x + x^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \le 1 \\ x = \frac{1}{3} \end{cases} \Leftrightarrow x = \frac{1}{3} \text{ (thỏa mãn)}$$

Vậy nghiệm của phương trình đã cho là $x = \frac{1}{3}$.

b) Ta có : $\alpha = \dfrac{(m - 2)180^0}{m}$, $\beta = \dfrac{(n - 2)180^0}{n}$

Mà $$\frac{\alpha}{\beta} = \frac{5}{7} \Leftrightarrow 7\alpha = 5\beta \Leftrightarrow \frac{7(m - 2)180^0}{m} = \frac{5(n - 2)180^0}{n}$$

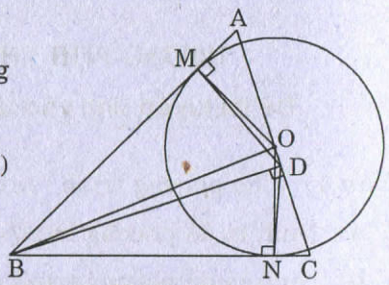
$$\Leftrightarrow 7mn - 14n = 5mn - 10m \Leftrightarrow mn - 7n + 5m = 0$$

$$\Leftrightarrow n(m - 7) + 5(m - 7) = -35 \Leftrightarrow (n + 5)(m - 7) = -35$$

Vì $m, n \ge 3$ nên $n + 5 \ge 8$, $m - 7 \ge -4$

$$\begin{cases} m - 7 = -1 \\ n + 5 = 35 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = 6 \\ n = 30 \end{cases}$$ Vậy $m = 6, n = 30$.

Câu 4. *(Hình 63)*



Hình 63

a) Vì BM, BN là các tiếp tuyến của đường tròn (O), suy ra $\widehat{BMO} = \widehat{BNO} = 90^0$.

Mà $\widehat{BDO} = 90^0$ (vì BD vuông góc AC) nên $\widehat{BMO} = \widehat{BNO} = \widehat{BDO} = 90^0$.

Suy ra M, N, D cùng thuộc một đường tròn đường kính BO.

Nên M, N, O, D, B cùng thuộc một đường tròn.

Suy ra bốn điểm B, M, D, N cùng nằm trên một đường tròn.

b) $\widehat{ADM} = \widehat{OBM}$ (vì tứ giác MODB nội tiếp).

$\widehat{CDN} = \widehat{OMN}$ (vì tứ giác ODNB nội tiếp).

$\widehat{OBM} = \widehat{OBN}$ Do đó $\widehat{ADM} = \widehat{CDN}$.

Câu 5.

a) Theo giả thiết ta có số điểm của đội bóng A đạt được là số tự nhiên. Vì A đấu 9 trận.

- Nếu A thắng x trận và thua 9 – x trận với x = 0, 1, 2, ..., 9 thì số điểm A có thể đạt được là : 0, 3, 6, 9, ..., 24, 27.
- Nếu A thắng y trận, hòa 1 trận và thua 8 – y trận với y = 0, 1, 2, ..., 8 nên số điểm A có thể đạt được là 1, 4, 7, ..., 22, 25.
- Nếu A thắng z trận, hòa 2 trận và thua 7 – z trận với z = 0, 1, 2, ..., 7 thì số điểm A có thể đạt được là 2, 5, 8, ..., 20, 23.

Vậy số điểm A có thể đạt được là một trong các số 0, 1, 2, ..., 25 và 27.

b) Vì A xếp thứ nhì nên A không thể thắng cả 9 trận.

Vậy số điểm của A tối đa là 25 điểm (thắng tất cả các đội còn lại và hòa đội xếp thứ nhất).

Số điểm của A không nhỏ hơn số điểm của 8 đội còn lại.

A và 8 đội còn lại đấu cả thảy (9.8) : 2 = 36 trận. Số điểm ít nhất của 9 đội này đạt được là : 2.36 = 72 (điểm).

Số điểm ít nhất mà A đạt được là : 72 : 9 = 8 (điểm).

Điều này xảy ra khi đội xếp nhất thắng cả 9 đội còn lại và 9 đội còn lại đều hòa nhau.

Vậy số điểm tối đa A đạt là 25 điểm và số điểm tối thiểu A đạt là 8 điểm.

ĐỀ 41

TRƯỜNG PTTH CHUYÊN TRẦN ĐẠI NGHĨA, TPHCM

Đề thi tuyển sinh vào lớp 10 (Ban A, B) năm học 2000 – 2001

Câu 1. Cho phương trình : $mx^2 - 2(m + 2)x + m = 0$ (có ẩn là x).

a) Định m để phương trình có nghiệm.

b) Định m để phương trình có hai nghiệm phân biệt đều âm.

Câu 2. Giải các phương trình :

a) $|2x^2 - 5x + 1| = |3x - 1|$ **b)** $-x^2 + 2 = \sqrt{2 - x}$.

Câu 3. Giải các hệ phương trình :

a) $\begin{cases} x^3 = 2y - x \\ y^3 = 2x - y \end{cases}$ **b)** $\begin{cases} x - y = (\sqrt{y} - \sqrt{x})(1 + xy) \\ x^3 + y^3 = 54 \end{cases}$

Câu 4. Chứng minh bất đẳng thức : $x^2 + y^2 + 1 \ge xy + x + y$.

Câu 5. Cho đường tròn (O; R) và một điểm P thuộc (O). Từ P vẽ hai tia Px, Py lần lượt cắt đường tròn (O) tại A và B. Cho góc $\widehat{xPy}$ là góc nhọn.

a) Vẽ hình bình hành APBM. Gọi K là trực tâm của tam giác ABM. Chứng minh rằng K thuộc đường tròn (O).

b) Gọi H là trực tâm của tam giác APB và I là trung điểm của đoạn AB. Chứng minh H, I, K thẳng hàng.

c) Khi hai tia Px, Py quay quanh P cố định sao cho Px, Py vẫn cắt (O) và góc không đổi thì điểm H lưu động trên đường cố định nào ?

BÀI GIẢI

Câu 1.

a) m = 0, phương trình trở thành : $-4x = 0 \Leftrightarrow x = 0$.

$m \ne 0$, ta có : $\Delta' = (m + 2)^2 - m^2 = 4m + 4 \ge 0 \Leftrightarrow m \ge -1$.

Vậy với $m \ge -1$ thì phương trình có nghiệm.

b) Phương trình đã cho có hai nghiệm phân biệt đều âm :

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta' > 0 \ (m \ne 0) \\ P > 0 \\ S < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m > -1 \ (m \ne 0) \\ 1 > 0 \\ \dfrac{2(m + 2)}{m} > 0 \end{cases} \Leftrightarrow m > 0.$$

Câu 2.

a) $|2x^2 - 5x + 1| = |3x - 1| \Leftrightarrow (2x^2 - 5x + 1)^2 - (3x - 1)^2 = 0$

$$\Leftrightarrow (2x^2 - 2x)(2x^2 - 8x + 2) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = 1 \\ x = 2 \pm \sqrt{3} \end{array}\right.$$

Vậy phương trình có các nghiệm là $x = 0$; $x = 1$; $x = 2 + \sqrt{3}$, $x = 2 - \sqrt{3}$.

b) $$-x^2 + 2 = \sqrt{2 - x} \Leftrightarrow \begin{cases} -x^2 + 2 \ge 0 \\ (-x^2 + 2)^2 = 2 - x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -x^2 + 2 \ge 0 \\ (x - 1)(x + 2)(x^2 - x - 1) = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -2 \le x \le 2 \\ \left[\begin{array}{l} x = 1 \\ x = -2 \\ x = \dfrac{1 \pm \sqrt{5}}{2} \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1 \\ x = -2 \\ x = \dfrac{1 - \sqrt{5}}{2} \end{array}\right.$$

Vậy phương trình có các nghiệm là : $x = 1$; $x = -2$; $x = \dfrac{1 - \sqrt{5}}{2}$.

Câu 3.

a) $\begin{cases} x^3 = 2y - x & (1) \\ y^3 = 2x - y & (2) \end{cases}$ Lấy (1) trừ (2) vế theo vế ta có :

$$x^3 - y^3 = 3(y - x) \quad \Leftrightarrow \quad (x - y)(x^2 + xy + y^2) = -3(x - y)$$

Suy ra : $x = y$ hoặc $x^2 + xy + y^2 = -3$.

Vì $x^2 + xy + y^2 > 0$ nên $x^2 + xy + y^2 = -3$ vô nghiệm. Vậy $x = y$.

Ta có (1) : $x^3 = 2x - x \quad \Leftrightarrow \quad x^3 = x \quad \Leftrightarrow \quad x = 0 \vee x = \pm 1$.

Vậy hệ có các nghiệm là : (0; 0); (1; 1); (–1; –1).

b) $\begin{cases} x - y = (\sqrt{x} - \sqrt{y})(1 + xy) & (1) \\ x^3 + y^3 = 54 & (2) \end{cases}$ Điều kiện : $x \geq 0$, $y \geq 0$.

Xét $x > y$: (1) không thỏa mãn.

Xét $x < y$: (1) không thỏa mãn. Vậy $x = y$.

Từ (2) cho ta : $2x^3 = 54 \quad \Leftrightarrow \quad x = 3$.

Vậy nghiệm của hệ là : (3; 3).

Câu 4. Ta có : $x^2 + y^2 \geq 2xy$ (Bất đẳng thức Côsi)

$x^2 + 1 \geq 2x$

$y^2 + 1 \geq 2y$

Suy ra : $2x^2 + 2y^2 + 2 \geq 2xy + 2x + 2y$

$\Leftrightarrow \quad x^2 + y^2 + 1 \geq yx + x + y$ (đpcm).

Câu 5. *(Hình 64)*

a) Ta có $\widehat{AKB}$ bù với $\widehat{AMB}$ (vì tứ giác MA'KB' nội tiếp được).

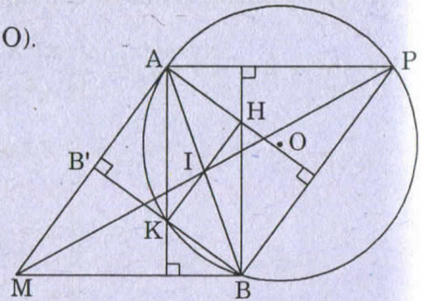
Mà $\widehat{AMB} = \widehat{APB}$ nên $\widehat{AKB}$ bù với $\widehat{APB}$

Vậy APBK nội tiếp được nên K thuộc (O).

b) Ta có BH song song với BK vì cùng vuông góc với PA.

AH song song với BK vì cùng vuông với PB. Nên tứ giác AHBK là hình bình hành, suy ra HK cắt AB tại trung điểm I.

Vậy I, H, K thẳng hàng.



Hình 64

c) Ta có BK vuông góc AM nên BK vuông góc với PB.

Suy ra PK là đường kính của đường tròn (O).

Ta có PH = 2.OI (OI là đường trung bình tam giác PHK).

Mà góc APB không đổi nên góc OIB không đổi, suy ra OI không đổi.

Vậy PH cũng không đổi. Do đó H lưu động trên đường tròn cố định tâm P, bán kính PH không đổi.

ĐỀ 42

TRƯỜNG PTTH CHUYÊN TRẦN ĐẠI NGHĨA, TPHCM

Đề thi tuyển sinh vào lớp 10 (Ban A, B) năm học 2001 – 2002

Câu 1. Cho phương trình : $5x^2 + mx - 28 = 0$ (có x là ẩn số)

Tìm m để phương trình có hai nghiệm x_1, x_2 thỏa mãn : $5x_1 + 2x_2 = 1$.

Câu 2. Cho phương trình : $ax^2 + bx + c$ $(a \neq 0)$, có hai nghiệm x_1, x_2 thỏa mãn $x_1 = x_2^2$. Chứng minh : $b^3 + a^2c + ac^2 = 3abc$

Câu 3. Giải các phương trình và hệ phương trình :

a) $x^2 - 3 + \sqrt{x + 3} = 0$

b) $\begin{cases} (x + y)^2 - 4(x + y) = 12 \\ (x - y)^2 - 2(x - y) = 3 \end{cases}$

Câu 4. Thu gọn biểu thức $A = \sqrt{6 - 2\sqrt{\sqrt{2} + \sqrt{12} + \sqrt{18 - 8\sqrt{2}}}}$.

Câu 5. Cho a, b, c là độ dài ba cạnh và p là nửa chu vi của một tam giác.

a) Chứng minh : $(p - a)(p - b)(p - c) \leq \dfrac{1}{8}abc$.

b) Chứng minh rằng phương trình sau đây vô nghiệm :

$$c^2x^2 + (a^2 - b^2 - c^2)x + b^2 = 0 \text{ (x là ẩn số).}$$

Câu 6. Cho đường tròn (O; R) có đường kính AB cố định và đường kính CD thay đổi (CD không trùng với AB). Vẽ tiếp tuyến (d) của đường tròn (O) tại B. Các đường thẳng AC, AD lần lượt cắt đường thẳng (d) tại P và Q.

a) Chứng minh tứ giác CPQD là một tứ giác nội tiếp.

b) Chứng minh trung tuyến AI của tam giác APQ vuông góc với CD.

c) Gọi E là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác CDP. Chứng minh E lưu động trên một đường tròn cố định khi đường kính CD thay đổi.

BÀI GIẢI

Câu 1. $5x^2 + mx - 28 = 0$.

Vì a, c trái dấu nên phương trình có hai nghiệm phân biệt.

Theo định lí Viet, ta có : $\begin{cases} x_1 + x_2 = -\dfrac{m}{5} \\ x_1x_2 = -\dfrac{28}{5} \end{cases}$

Ta có : $\begin{cases} 5x_1 + 5x_2 = -m \\ 5x_1 + 2x_2 = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = \dfrac{2m + 15}{15} \\ x_2 = \dfrac{-m - 1}{3} \end{cases} \Rightarrow \left(\dfrac{-m - 1}{3}\right)\left(\dfrac{2m + 5}{15}\right) = -\dfrac{28}{5}$.

Giải phương trình trên ta được : $m = -13$ hay $m = \dfrac{19}{2}$.

Câu 2. $ax^2 + bx + c = 0\ (a \neq 0)$ có hai nghiệm x_1, x_2 thỏa mãn $x_1 = x_2^2$.

Ta có : $b^3 + a^2c + ac^2 = 3abc \Leftrightarrow \dfrac{b^3}{a^3} + \dfrac{a^2c}{a^3} + \dfrac{ac^2}{a^3} = \dfrac{3abc}{a^3}$

$$\Leftrightarrow \frac{b^3}{a^3} + \frac{c}{a} + \frac{c^2}{a^2} = \frac{3abc}{a^2}$$

$$\Leftrightarrow -(x_1 + x_2)^3 + x_1x_2 + (x_1x_2)^2 = -3(x_1 + x_2).x_1x_2$$

(vì $S = x_1 + x_2 = -\dfrac{b}{a}$, $P = x_1x_2 = \dfrac{c}{a}$)

$$\Leftrightarrow -x_1^3 - x_2^3 + x_1x_2 + (x_1x_2)^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow -x_2^6 - x_2^3 + x_2^2x_2 + (x_2^2x_2)^2 = 0 \text{ (đúng)}$$

Vậy $b^3 + a^2c + ac^2 = 3abc$ đúng.

Câu 3.

a) $x^2 - 3 + \sqrt{x + 3} = 0$. Điều kiện : $x \geq -3$.

Đặt $u = \sqrt{x + 3}\ (u \geq 0) \Leftrightarrow u^2 = x + 3$. Ta có hệ : $\begin{cases} u^2 = x + 3 \\ x^2 - 3 + u = 0 \end{cases}$

Suy ra : $u^2 - x^2 - x - u = 0 \Leftrightarrow (u + x)(u - x - 1) = 0$.

- Với $u = -x$, ta có : $x^2 - x - 3 = 0 \Leftrightarrow x = \dfrac{1 + \sqrt{13}}{2}$ hay $x = \dfrac{1 - \sqrt{13}}{2}$.

  Ta chỉ nhận nghiệm $x = \dfrac{1 + \sqrt{13}}{2}$ (vì $u \geq 0$).

- Với $u = x + 1$, ta có : $x^2 + x - 2 = 0 \Leftrightarrow x = 1$ hay $x = -2$.

  Ta chỉ nhận nghiệm $x = 1$ (vì $u \geq 0$).

Vậy phương trình có 2 nghiệm là : $x = \dfrac{1 + \sqrt{13}}{2}$; $x = 1$.

b) $\begin{cases} (x + y)^2 - 4(x + y) = 12 & (1) \\ (x - y)^2 - 2(x - y) = 3 & (2) \end{cases}$

Giải (1) ta được : $x + y = 6$ hay $x + y = -2$

Giải (2) ta được : $x - y = -1$ hay $x + y = 3$

Với $\begin{cases} x + y = 6 \\ x - y = -1 \end{cases}$ ta có nghiệm $\begin{cases} x = \dfrac{5}{2} \\ y = \dfrac{7}{2} \end{cases}$

Với $\begin{cases} x + y = 6 \\ x - y = 3 \end{cases}$ ta có nghiệm $\begin{cases} x = \dfrac{9}{2} \\ y = \dfrac{3}{2} \end{cases}$

Với $\begin{cases} x + y = -2 \\ x - y = -1 \end{cases}$ ta có nghiệm $\begin{cases} x = -\dfrac{3}{2} \\ y = -\dfrac{1}{2} \end{cases}$

Với $\begin{cases} x + y = -2 \\ x - y = 3 \end{cases}$ ta có nghiệm $\begin{cases} x = \dfrac{1}{2} \\ y = -\dfrac{5}{2} \end{cases}$

Vậy hệ phương trình có 4 nghiệm (x; y) là :

$$\left(\frac{5}{2}; \frac{7}{2}\right), \left(\frac{9}{2}; \frac{3}{2}\right), \left(-\frac{3}{2}; -\frac{1}{2}\right), \left(\frac{1}{2}; -\frac{5}{2}\right).$$

Câu 4. $A = \sqrt{6 - 2\sqrt{\sqrt{2} + \sqrt{12} + \sqrt{18 - 8\sqrt{2}}}} = \sqrt{6 - 2\sqrt{\sqrt{2} + \sqrt{12} + \sqrt{(4 - \sqrt{2})^2}}}$

$$= \sqrt{6 - 2\sqrt{\sqrt{2} + \sqrt{12} + 4 - \sqrt{2}}} = \sqrt{6 - 2\sqrt{2\sqrt{3} + 4}} = \sqrt{6 - 2\sqrt{(\sqrt{3} + 1)^2}}$$

$$= \sqrt{6 - 2(\sqrt{3} + 1)} = \sqrt{4 - 2\sqrt{3}} = \sqrt{(\sqrt{3} - 1)^2} = \sqrt{3} - 1.$$

Câu 5.

a) Ta có : $xy \leq \dfrac{(x + y)^2}{4}$ (vì $(x - y)^2 \geq 0$)

và : $(p - a)(p - b) \leq \dfrac{(p - a + p - b)^2}{4} = \dfrac{c^2}{4}$

$$(p - b)(p - c) \leq \frac{(p - b + p - c)^2}{4} = \frac{a^2}{4}$$

$$(p - c)(p - a) \leq \frac{(p - c + p - a)^2}{4} = \frac{b^2}{4}$$

Nhân ba bất đẳng thức trên ta được : $(p - a)^2(p - b)^2(p - c)^2 \le \dfrac{a^2b^2c^2}{64}$

Suy ra : $(p - a)(p - b)(p - c) \le \dfrac{abc}{8}$ (đpcm).

b) $c^2x^2 + (a^2 - b^2 - c^2)x + b^2 = 0$ (*)

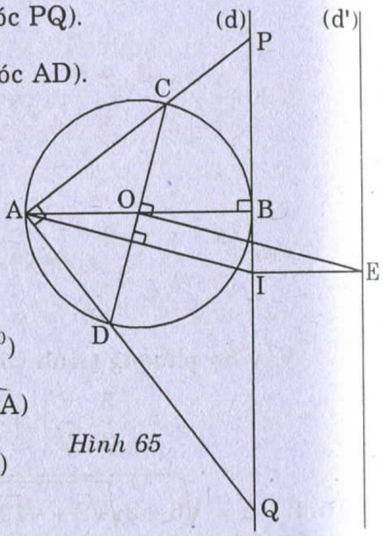
$$\Delta = (a^2 - b^2 - c^2)^2 - 4b^2c^2 = (a^2 - b^2 - c^2 + 2bc)(a^2 - b^2 - c^2 - 2bc)$$

$$= [a^2 - (b - c)^2][a^2 - (b + c)^2]$$

Vì $a < b + c$ và $a > |b - c|$ nên $\Delta < 0$.

Vậy phương trình (*) vô nghiệm.

Câu 6. *(Hình 65)*



Hình 65

a) Ta có : $\widehat{CPQ} + \widehat{PAB} = 90^0$ (vì AB vuông góc PQ).

$\widehat{PAB} + \widehat{OAD} = 90^0$ (vì AC vuông góc AD).

Suy ra : $\widehat{CPQ} = \widehat{OAD}$.

Ta lại có $\widehat{OAD} = \widehat{ODA}$ (vì OA = OD).

Nên $\widehat{CPQ} = \widehat{ODA}$,

suy ra tứ giác CPQD nội tiếp được.

b) Ta có : $\widehat{AQP} + \widehat{APQ} = 90^0$ (vì $\widehat{PAQ} = 90^0$)

Hay $\widehat{AQP} = \widehat{ODA} = 90^0$ (vì $\widehat{APQ} = \widehat{ODA}$)

Suy ra $\widehat{IAQ} = \widehat{ODA} = 90^0$ (vì $\widehat{IAQ} = \widehat{AQI}$)

Vậy AI vuông góc với CD.

c) Ta có đường tròn ngoại tiếp tam giác CPD cũng là đường tròn ngoại tiếp tứ giác CPQD. Từ O vẽ đường thẳng vuông góc với CD, đường thẳng này chính là đường trung trực của CD. Từ I vẽ đường thẳng PQ, đường thẳng này chính là đường trung trực của PQ.

Hai đường trung trực trên cắt nhau tại E. E chính là tâm đường tròn ngoại tiếp tứ giác CPQD.

Ta có IE song song với OA vì cùng vuông góc với PQ.

OE song song với AI vì cùng vuông góc với CD.

Vậy tứ giác AOEI là một hình bình hành, cho ta : IE = OA = R (không đổi). Ta có khoảng cách từ điểm E đến đường thẳng (d) bằng R, nên E lưu động trên đường thẳng (d') song song với (d) và cách (d) một khoảng không đổi là R.

ĐỀ 43

TRƯỜNG ĐẠI HỌC SƯ PHẠM HÀ NỘI

Đề thi tuyển sinh vào lớp 10 năm học 2004 – 2005

Câu 1. Giải hệ phương trình : $\begin{cases} x^2 - xy + y^2 = 19 \\ x^4 + x^2y^2 + y^4 = 931 \end{cases}$

Câu 2. Chứng minh rằng phương trình sau vô nghiệm :

$$(x + 2)\sqrt{x + 1} = 2x + 1.$$

Câu 3. Chứng minh rằng : $\left(\sqrt[3]{3 + 2\sqrt{2}} + \sqrt[3]{3 - 3\sqrt{2}}\right)^8 > 3^6$.

Câu 4.

1. Chứng minh rằng số $n = 18^{6^{2004}}$ có tính chất là tồn tại hai số nguyên dương p và q thỏa mãn điều kiện : $\begin{cases} 0 < p < q < n \\ (p + (p + 1) + (p + 2) + \ldots + q) \,\vdots\, n \end{cases}$
2. Số $n = 16^{6^{2004}}$ có tính chất nói trên hay không ?

Câu 5. Cho tam giác ABC có $\widehat{ABC} = 40^0$ và điểm P trong tam giác ABC sao cho $\widehat{PAC} = 10^0$, $\widehat{PCA} = 20^0$, $\widehat{PAB} = 30^0$. Giả sử Q là điểm đối xứng với điểm P qua đường trung trực của đoạn AB.

1. Tam giác CPQ là tam giác gì ?
2. Tính $\widehat{CPB}$.

BÀI GIẢI

Câu 1. Đặt $u = x + y$; $v = x.y$. Hệ đã cho trở thành :

$$\begin{cases} u^2 - 3v = 19 \\ (u^2 - 2v)^2 - v^2 = 931 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u^2 = 3v + 19 \\ (3v + 19 - 2v)^2 - v^2 = 931 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} v = 15 \\ u^2 = 64 \end{cases}$$

Với $u^2 = 64$ và $v = 15$, ta có hệ : $\begin{cases} (x + y)^2 = 64 \\ x.y = 15 \end{cases}$

Giả ra ta được các nghiệm (x; y) của hệ đã cho là :

$$(3; 5), (5; 3), (-3; -5), (-5; -3).$$

Câu 2. Giả sử phương trình đã cho có nghiệm $x = x_0$ khi đó ta có :

$$(x_0 + 2)\sqrt{x_0 + 1} = 2x_0 + 1 \quad (1)$$

Vì $x_0 + 1 \ge 0$ nên $(x_0 + 2)\sqrt{x_0 + 1} \ge 0 \Rightarrow 2x_0 + 1 \ge 0 \Rightarrow x_0 \ge -\dfrac{1}{2}$.

Bình phương hai vế của phương trình ta được :

$$(x_0^2 + 4x_0 + 4)(x_0 + 1) = 4x_0^2 + 4x_0 + 1 \quad \Leftrightarrow \quad x_0^3 + x_0^2 + 4x_0 + 3 = 0$$

$\Leftrightarrow\ x_0^2(x_0 + 1) + 2(2x_0 + 1) + 1 = 0$, vô lí $(x_0^2(x_0 + 1) + 2(2x_0 + 1) + 1 \geq 1)$.

Vậy phương trình đã cho vô nghiệm.

Câu 3. Đặt $a = x + y$ với $x = \sqrt[3]{3 + 2\sqrt{2}}$, $y = \sqrt[3]{3 - 2\sqrt{2}}$.

Dễ thấy : $x^3 + y^3 = 6$ và $x.y = 1$.

Suy ra : $a^3 = (x^3 + y^3) + 3xy\,(x + y) = 6 + 3a$

$= 3(1 + 1 + a) > 3\,(3\sqrt[3]{1.1.a})$ (vì $x > 1$, $y > 0$ nên $a > 1$).

Do đó : $a^9 > (3^2)^3.a \Rightarrow a^8 > 3^6$.

Vậy : $(\sqrt[3]{3 + 2\sqrt{2}} + \sqrt[3]{3 - 2\sqrt{2}})^8 > 3^6$.

Câu 4.

1. Ta có : $S = p + (p + 1) + (p + 2) + \ldots + q = \dfrac{(p + q)(q - p + 1)}{2}$

Ta tìm số nguyên dương p, q sao cho : $\begin{cases} 0 < p < q < n & (1) \\ S \vdots n & (2) \end{cases}$

Với $n = 18^{6^{2004}}$ từ (2), ta có : $(q + 1 - p)(p + q) \vdots 2.2^{6^{2004}}.9^{6^{2004}}$

Vì $q + 1 - p < p + q$ và $(q + 1 - p)$, $(p + q)$ khác tính chẵn lẻ, đồng thời $2.2^{6^{2004}} < 9^{6^{2004}}$ nên ta chọn p, q sao cho :

$$\begin{cases} q + 1 - p = 2.2^{6^{2004}} \\ p + q = 9^{6^{2004}} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} p = \dfrac{9^{6^{2004}} - 2.2^{6^{2004}} + 1}{2} \\ q = \dfrac{9^{6^{2004}} + 2.2^{6^{2004}} - 1}{2} \end{cases}$$

nghĩa là p, q thỏa mãn (1) và (2).

2. Giả sử có p, q nguyên dương thỏa mãn (1), (2) với $n = 16^{6^{2004}}$ thì từ (2), suy ra : $(q - p + 1)(p + q) \vdots 2.16^{6^{2004}}$

Vì hai số $(q - p + 1)$ và $(p + q)$ khác tính chẵn lẻ nên chỉ có thể xảy ra một trong hai trường hợp sau :

i) Nếu $(q - p + 1)$ lẻ và $(p + q)$ chẵn.

Từ (2) có $(q + p) \vdots 2n \Rightarrow p + q \geq 2n \Rightarrow p \geq n$ hoặc $q \geq n$ trái với (1).

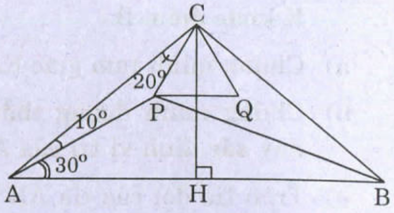
ii) Nếu $(q - p + 1)$ chẵn và $(p + q)$ lẻ.

Từ (2) có $(q - p + 1) \vdots 2n \Rightarrow q - p + 1 \geq 2n \Rightarrow p + q \geq 2n$

$\Rightarrow p \geq n$ hoặc $q \geq n$ trái với (1).

Vậy số $n = 16^{6^{2004}}$ không có tính chất đã nêu.

Câu 5. *(Hình 66)*



Hình 66

1. Theo giả thiết ta có :

$\widehat{CAB} = \widehat{PAC} + \widehat{PAB} = 40^0 = \widehat{ABC}$

nên ΔCAB cân ở đỉnh C với góc $\widehat{ACB} = 100^0$.

Kẻ $CH \perp AB$, CH chính là trục đối xứng của tam giác CAB và tam giác CPQ, do đó tam giác CPQ cân ở đỉnh C.

Mặt khác tam giác PCA đối xứng với tam giác QCB qua trục CH nên :

$$\widehat{QCB} = \widehat{PCA} = 20^0 \quad \Rightarrow \quad \widehat{PCQ} = 60^0$$

suy ra tam giác CPQ là tam giác đều.

2. Ta có : $\widehat{CQB} = \widehat{CPA} = 150^0$ mà $\widehat{CQP} = 60^0$ nên $\widehat{PQB} = 150^0$.

Do đó : $\Delta QCB = \Delta QPB$ (c.g.c) suy ra $\widehat{QPB} = \widehat{QCB} = \widehat{PCA} = 20^0$.

Vậy : $\widehat{CPB} = 80^0$.

ĐỀ 44

TRƯỜNG ĐH NGOẠI NGỮ, ĐHQG HÀ NỘI

Đề thi tuyển sinh vào lớp 10 năm học 2004 – 2005

Câu 1. Cho biểu thức : $M = \left(\dfrac{2x\sqrt{x} + x - \sqrt{x}}{x\sqrt{x} - 1} - \dfrac{x + \sqrt{x}}{x - 1}\right)\dfrac{x - 1}{2x + \sqrt{x} - 1} + \dfrac{\sqrt{x}}{2\sqrt{x} - 1}$.

a) Hãy tìm điều kiện của x để biểu thức M có nghĩa, sau đó rút gọn M.

b) Với giá trị nào của x thì biểu thức M đạt giá trị nhỏ nhất và tìm giá trị nhỏ nhất đó của M ?

Câu 2.

a) Giải phương trình : $(x^2 + 3x + 2)(x^2 + 7x + 12) = 24$.

b) Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức : $P = 2 - 5x^2 - y^2 - 4xy + 2x$.

Câu 3. Giải hệ phương trình : $\begin{cases} 6x^2 - 3xy + x = 1 - y \\ x^2 + y^2 = 1 \end{cases}$

Câu 4. Cho đường tròn (O) và dây cung BC cố định. Gọi A là điểm di động trên cung lớn BC của đường tròn (O), (A khác B, C). Tia phân giác của góc ACB cắt đường tròn (O) tại điểm D khác điểm C, lấy điểm I thuộc đoạn CD sao cho DI = DB. Đường thẳng BI cắt đường tròn (O) tại điểm K khác điểm B.

a) Chứng minh tam giác KAC cân.

b) Chứng minh đường thẳng AI luôn đi qua một điểm J cố định, từ đó hãy xác định vị trí của A để độ dài đoạn AI lớn nhất.

c) Trên tia đối của tia AB lấy điểm M sao cho AM = AC. Tìm tập hợp các điểm M khi A di động trên cung lớn AB của đường tròn (O).

Câu 5. Hãy tìm cặp số (x; y) sao cho y nhỏ nhất thỏa mãn :

$$x^2 + 5y^2 + 2y - 4xy - 3 = 0.$$

BÀI GIẢI

Câu 1.

a) Điều kiện : $x \ge 0,\ x \ne \dfrac{1}{4}$ và $x \ne 1$.

$$M = \left(\frac{2x\sqrt{x} + x - \sqrt{x}}{x\sqrt{x} - 1} - \frac{x + \sqrt{x}}{x - 1}\right) . \frac{x - 1}{2x + \sqrt{x} - 1} + \frac{\sqrt{x}}{2\sqrt{x} - 1}$$

$$= \frac{x + \sqrt{x}}{x + \sqrt{x} + 1} - \frac{\sqrt{x}}{2\sqrt{x} - 1} + \frac{\sqrt{x}}{2\sqrt{x} - 1} = \frac{x + \sqrt{x}}{x + \sqrt{x} + 1}.$$

b) Do $x \ge 0$ nên $M \ge 0$.

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow x = 0$.

Vậy giá trị nhỏ nhất của M là 0, đạt được khi x = 0.

Câu 2.

a)

$$(x^2 + 3x + 2)(x^2 + 7x + 12) = 24$$
$$\Leftrightarrow \quad (x + 1)(x + 2)(x + 3)(x + 4) = 24$$
$$\Leftrightarrow \quad [(x + 1)(x + 4)][(x + 2)(x + 3)] = 24$$
$$\Leftrightarrow \quad (x^2 + 5x + 4)(x^2 + 5x + 6) = 24 \qquad (*)$$

Đặt $t = x^2 + 5x + 4$. (*) trở thành : $\quad t(t + 2) = 24$

$$\Leftrightarrow \quad t_1 = 4 \quad \text{và} \quad t_2 = -6.$$

Với $t_1 = 4$, ta có : $\quad x^2 + 5x + 4 = 4 \quad \Leftrightarrow x_1 = 0$ và $x_2 = -5$.

Với $t_2 = -6$, ta có : $\quad x^2 + 5x + 4 = -6 \quad \Leftrightarrow x^2 + 5x + 10 = 0$ (vô nghiệm).

Vậy phương trình đã cho có hai nghiệm : x = 0 và x = –5.

b) Ta có : $\quad P = 3 - (2x + y)^2 - (x - 1)^2 \le 3$ với mọi $x, y \in R$.

Dấu "=" xảy ra $\quad \Leftrightarrow \quad x = 1$ và $y = -2$.

Vậy giá trị lớn nhất của P là 3, đạt được khi x = 1 và y = – 2.

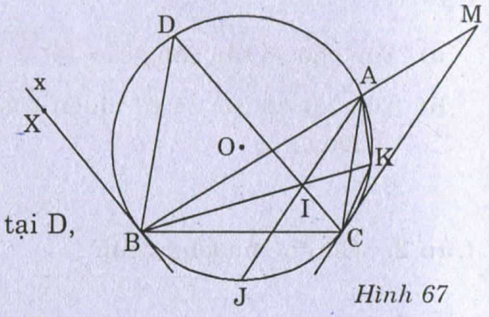
Câu 3.

$$\begin{cases} 6x^2 - 3xy + x = 1 - y \\ x^2 + y^2 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (3x - 1)(2x - y + 1) = 0 \\ x^2 + y^2 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} \begin{cases} 3x = 1 \\ x^2 + y^2 = 1 \end{cases} & (I) \\ \begin{cases} y = 2x + 1 \\ x^2 + y^2 = 1 \end{cases} & (II) \end{array}\right.$$

Giải hệ (I) và (II) ta được các nghiệm (x; y) là :

$$\left(\frac{1}{3}; \frac{2\sqrt{2}}{3}\right), \left(\frac{1}{3}; -\frac{2\sqrt{2}}{3}\right), (0; 1), \left(-\frac{4}{5}; -\frac{3}{5}\right).$$

Câu 4. *(Hình 67)*



Hình 67

a) Ta có $\text{sđ}\widehat{DBK} = \dfrac{1}{2}\text{sđ}(\overset{\frown}{DA} + \overset{\frown}{AK})$

$$\text{sđ}\widehat{DIB} = \frac{1}{2}\text{sđ}(\overset{\frown}{BD} + \overset{\frown}{KC})$$

Mà $\quad \text{sđ}\overset{\frown}{BD} = \text{sđ}\overset{\frown}{DA}$ và ΔDBI cân tại D,

nên $\quad \text{sđ}\overset{\frown}{AK} = \text{sđ}\overset{\frown}{KC}$.

Suy ra AK = CK, hay ΔKAC cân tại K.

b) Từ câu a) ta thấy I là tâm đường tròn nội tiếp ΔABC. Nên đường thẳng AI luôn đi qua trung điểm J của cung $\overset{\frown}{BC}$.

Nhận xét rằng $\widehat{JIC} = \widehat{JCI}$ nên ΔJIC cân tại J.

Suy ra IJ = JC (không đổi), do đó độ dài AI lớn nhất ⇔ AJ lớn nhất ⇔ AJ là đường kính của đường tròn (O) hay A là điểm chính giữa của cung BC.

c) *Phần thuận :* Theo giả thiết ΔAMC cân tại A, suy ra $\widehat{BMC} = \dfrac{1}{2}\widehat{BAC}$.

Giả sử số đo của góc $\widehat{BAC}$ là 2α (không đổi) thì khi A di động trên cung lớn $\overset{\frown}{BC}$ điểm M thuộc cung chứa góc α dựng trên đoạn BC về phía điểm O.

Phần đảo : Tiếp tuyến Bx với đường tròn (O) cắt cung chứa góc α dựng trên đoạn BC tại X. Lấy điểm M bất kỳ trên cung $\overset{\frown}{CX}$ là một phần của cung chứa góc α dựng trên đoạn BC (M ≠ X, M ≠ C). Nối MB cắt

(O) tại A thì A thuộc cung lớn BC. Khi đó vì $\widehat{BAC} = 2\alpha$, $\widehat{AMC} = \alpha$ nên $\widehat{ACM} = \alpha$, suy ra ΔACM cân tại A hay AC = AM.

Kết luận : Quỹ tích M là cung CX, là một phần của cung chứa góc α, dựng trên đoạn BC về phía điểm O, không kể hai điểm X, C.

Câu 5. $x^2 + 5y^2 + 2y - 4xy - 3 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x^2 - 4yx + (5y^2 + 2y - 3) = 0$

Phương trình bậc hai ẩn x có nghiệm khi :

$\Delta' \geq 0 \quad \Leftrightarrow \quad 4y^2 - (5y^2 + 2y - 3) \geq 0 \quad \Leftrightarrow \quad -3 \leq y \leq 1.$

Vậy (x; y) = (6; –3).

ĐỀ 45

TRƯỜNG ĐẠI HỌC VINH

Đề thi tuyển sinh vào lớp 10 khối PTTH chuyên Toán, Tin năm học 2005 – 2006

Câu 1.

a) Tìm chữ số tận cùng của $19^{6^{2005}}$.

b) Tìm tất cả các số tự nhiên n sao cho $n^2 - 14n - 256$ là một số chính phương.

Câu 2. Giải hệ phương trình : $\begin{cases} x + \dfrac{1}{\sqrt{y}} = 2 \\ y + \dfrac{1}{\sqrt{x}} = 2 \end{cases}$

Câu 3. Tìm các số nguyên a, b, c thỏa mãn : $a^2 + b^2 + c^2 \leq ab + 3b + 2c - 4$.

Câu 4. Cho tam giác đều ABC cạnh bằng a (a > 0) và một điểm M chuyển động trên đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC.

a) Chứng minh rằng nếu M thuộc cung nhỏ AB thì : MA + MB = MC.

b) Tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của biểu thức : MA + MB + MC.

Câu 5. Cho hình vuông ABCD có AB = 14cm. Trong hình vuông có đánh dấu 76 điểm phân biệt. Chứng minh rằng tồn tại một đường tròn có bán kính 2cm chứa trong nó ít nhất 4 điểm trong số các điểm trên.

BÀI GIẢI

Câu 1.

a) Ta có : $19 \equiv -1 \pmod{10}$ và 6^{2005} là một chẵn nên $19^{6^{2005}} \equiv 1 \pmod{10}$.

Vậy chữ số tận cùng đã cho là 1.

b) Đặt $n^2 - 14n - 256 = k^2$, $k \in \mathbb{N}$.

$\Rightarrow \quad (n - 7)^2 - k^2 = 305 \quad \Leftrightarrow \quad (n - k - 7)(n + k + 7) = 305.$

Mà 305 = 3.105 = 5.61. Ta xét các khả năng sau :

1. $n - k - 7 = 1$ và $n + k - 7 = 305$, khi đó n = 160.
2. $n - k - 7 = -305$ và $n + k - 7 = -1$, khi đó n = –146 (loại).
3. $n - k - 7 = 5$ và $n + k - 7 = 61$, khi đó n = 40.
4. $n - k - 7 = -61$ và $n + k - 7 = -5$, khi đó n = –26 (loại).

Vậy n = 40, k = 28 hoặc n = 160, k = 152.

Câu 2. Điều kiện : x > 0, y > 0.

Đặt $a = \sqrt{x}$ (a > 0), $b = \sqrt{y}$ (b > 0). Ta được hệ sau :

$$\begin{cases} a^2b + 1 = 2b \\ ab^2 + 1 = 2a \end{cases} \Rightarrow \quad ab(a - b) = -2(a - b) \quad \Leftrightarrow \quad a - b = 0 \text{ (vì a, b > 0).}$$

Thay vào hệ trên ta được hệ : $\begin{cases} a = b > 0 \\ a^3 - 2a + 1 = 0 \end{cases}$

Giải ra ta được : $a = b = 1$; $a = b = \dfrac{-1 + \sqrt{5}}{2}$.

Với a = b = 1 thì x = y = 1.

Với $a = b = \dfrac{-1 + \sqrt{5}}{2}$ thì $x = y = \dfrac{3 - \sqrt{5}}{2}$.

Vậy nghiệm (x; y) của hệ là : (1; 1), $\left(\dfrac{3 - \sqrt{5}}{2}; \dfrac{3 - \sqrt{5}}{2}\right)$.

Câu 3. Theo giả thiết a, b, c nguyên suy ra :

$$a^2 - ab + b^2 - 3b + 3 + c^2 - 2c + 1 \leq 0.$$

$$\Leftrightarrow \quad \left(a - \frac{b}{2}\right)^2 + 3\left(\frac{b}{2} - 1\right)^2 + (c - 1)^2 \leq 0.$$

Suy ra : $a = \dfrac{b}{2}$; $\dfrac{b}{2} = 1$; $c = 1$. Hay a = 1; b = 2; c = 1.

Câu 4. *(Hình 68)*

a) Lấy điểm I trên đoạn MC sao cho MI = MB.

Vì $\widehat{BMC} = \widehat{BAC} = 60^0$ nên ΔBMI đều.

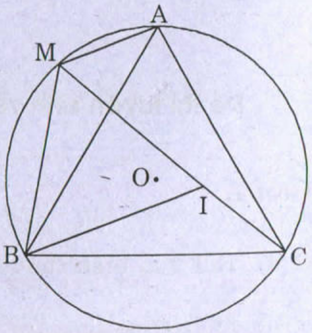
Do đó : $\widehat{MBI} = 60^0$ và BI = BM (1)

Vì $\widehat{ABC} = 60^0$ nên $\widehat{MBA} = \widehat{IBC}$ (2)

Từ (1) và (2), suy ra $\Delta AMB = \Delta CIB$ (c.g.c)

Do đó : MA = IC.

Vậy : MA + MB = MI + IC = MC.



Hình 68

b) Giả sử M thuộc cung nhỏ AB.

Theo câu a) ta có : $MA + MB + MC = 2MC$.

Do $MC \le 2R$ nên $T \le 4R$ mà $R = \dfrac{a\sqrt{3}}{3}$.

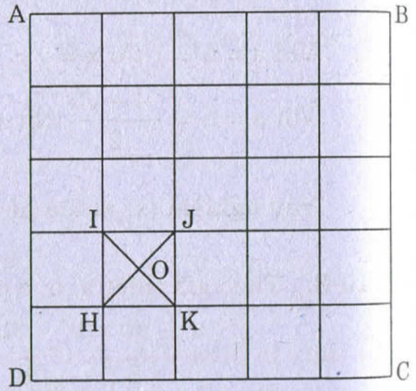
Vậy $MA + MB + MC$ lớn nhất là $\dfrac{4\sqrt{3}}{3}a$, đạt được khi M là điểm chính giữa cung nhỏ AB, BC hoặc CA.

Khi M thuộc cung nhỏ AB thì $\widehat{MAC} \ge 60^0 = \widehat{AMC}$ nên $MC \ge AC = a$. Vậy $MA + MB + MC$ nhỏ nhất là 2a, đạt được khi M trùng với một trong các đỉnh A, B hoặc C.

Câu 5. *(Hình 69)*

Chia hình vuông ABCD thành 25 hình vuông nhỏ có cạnh bằng $\dfrac{14}{5}$ (cm).

Theo nguyên lí Dirichlet, suy ra tồn tại một hình vuông nhỏ IJHK chứa ít nhất 4 điểm trong số 76 điểm đã cho.



Hình 69

Gọi O là tâm hình vuông IJHK. Ta có

$IJ = \dfrac{14}{5}$ (cm) nên $IK = \dfrac{14}{5}\sqrt{2}$ (cm).

Suy ra $OI = \dfrac{7\sqrt{2}}{5}$ (cm).

Nhận thấy rằng đường tròn ngoại tiếp hình vuông IJHK có tâm O bán kính OI chứa tất cả các điểm trong hình vuông IJKH.

Mặt khác thì $\dfrac{7\sqrt{2}}{5} < 2$ nên đường tròn tâm O bán kính 2cm thỏa mãn điều kiện bài toán đã cho.

ĐỀ 46

TRƯỜNG ĐẠI HỌC VINH

Đề thi tuyển sinh vào lớp 10 khối PTTH chuyên Khoa học Tự nhiên năm học 2005 – 2006

Câu 1.

a) Rút gọn biểu thức sau : $A = \sqrt{\dfrac{8 + \sqrt{15}}{2}} + \sqrt{\dfrac{8 - \sqrt{15}}{2}}$.

b) Giải phương trình : $\sqrt{x + 5} + \sqrt{3 - x} = 4$.

Câu 2. Chứng minh rằng $(n^3 + 17n) \vdots 16$ với mọi số tự nhiên n.

Câu 3. Giả sử x_1, x_2 là hai nghiệm của phương trình : $\dfrac{x^2 - 4x}{1 - x} = 3x + m$, trong đó m là tham số. Tìm m để biểu thức $|x_1 - x_2|$ đạt giá trị nhỏ nhất.

Câu 4. Cho hình vuông ABCD. Hai điểm I, J lần lượt thuộc hai cạnh BC và CD sao cho $\widehat{IAJ} = 45^0$. Đường chéo BD cắt AI và AJ tương ứng tại H và K. Tính tỉ số $\dfrac{HK}{IJ}$.

Câu 5. Cho hai đường tròn $(O_1; R_1)$ và $(O_2; R_2)$ có $R_1 > R_2$ tiếp xúc ngoài với nhau tại A. Đường thẳng d đi qua A cắt đường tròn $(O_1; R_1)$ tại M và cắt đường tròn $(O_2; R_2)$ tại N (các điểm M, N khác A).

a) Xác định vị trí của đường thẳng d để độ dài đoạn thẳng MN lớn nhất.

b) Tìm tập hợp các trung điểm I của các đoạn thẳng MN khi đường thẳng d quay quanh điểm A.

BÀI GIẢI

Câu 1.

a) Ta có : $2A = \sqrt{16 + 2\sqrt{15}} + \sqrt{16 - 2\sqrt{15}} = \sqrt{(\sqrt{15} + 1)^2} + \sqrt{(\sqrt{15} - 1)^2}$

$$= \sqrt{15} + 1 + \sqrt{15} - 1 = 2\sqrt{15}.$$

Suy ra : $A = \sqrt{15}$.

b) Điều kiện : $-5 \le x \le 3$.

$$\sqrt{x + 5} + \sqrt{3 - x} = 4 \quad \Leftrightarrow \quad 8 + 2\sqrt{(x + 5)(3 - x)} = 16$$

$$\Leftrightarrow \quad \sqrt{(x + 5)(3 - x)} = 4 \quad \Leftrightarrow \quad -x^2 - 2x + 15 = 16$$

$$\Leftrightarrow \quad x^2 + 2x + 1 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = -1 \quad \text{(thỏa điều kiện)}$$

Vậy nghiệm của phương trình là $x = -1$.

Câu 2. Ta có : $n^3 + 17n = n^3 - n + 18n$

$$= (n - 1)n(n + 1) + 18n \vdots 6, \text{ với mọi } n \in \mathbb{N}.$$

Câu 3. Điều kiện : $x \ne 1$.

$$\frac{x^2 - 4x}{1 - x} = 3x + m \quad \Leftrightarrow \quad x^2 - 4x = -3x^2 - mx + 3x + m$$

$$\Leftrightarrow \quad 4x^2 - (m - 7)x - m = 0 \qquad (1)$$

Ta có : $\Delta = (m - 7)^2 + 16m = (m + 1)^2 + 48 > 0$, $\forall m$ nên phương trình (1) có hai nghiệm, suy ra phương trình đã cho cũng có hai nghiệm x_1, x_2 khác 1. Khi đó : $(|x_1 - x_2|)^2 = (x_1 + x_2)^2 - 4x_1x_2$.

Theo định lí Viet ta có : $\begin{cases} S = x_1 + x_2 = \dfrac{m-7}{4} \\ P = x_1x_2 = -\dfrac{m}{4} \end{cases}$

Nên : $(|x_1 - x_2|)^2 = \left(\dfrac{m-7}{4}\right)^2 + m = \dfrac{m^2 + 2m + 49}{16} = \dfrac{(m+1)^2 + 48}{16} \ge 3.$

Vậy giá trị nhỏ nhất của $|x_1 - x_2|$ là $\sqrt{3}$, đạt được khi m = –1.

Câu 4. *(Hình 70)*

Theo giả thiết ta có $\widehat{HAJ} = \widehat{HDJ} = 45^0$, suy ra tứ giác AHJD nội tiếp.

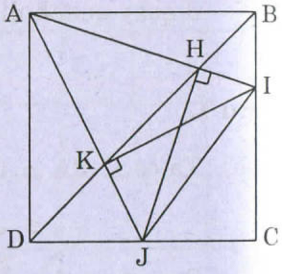
Suy ra $\widehat{AHJ} = 90^0$. Vậy tam giác AHJ vuông cân tại H, suy ra :

$$\frac{AH}{AJ} = \frac{\sqrt{2}}{2} \qquad (1)$$

Tương tự, ta có : $\dfrac{AK}{AI} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$ (2)

Từ (1) và (2), suy ra $\Delta AHK \backsim \Delta AJI$.

Do đó : $\dfrac{HK}{IJ} = \dfrac{AH}{AJ} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$.



Hình 70

Câu 5. *(Hình 71)*

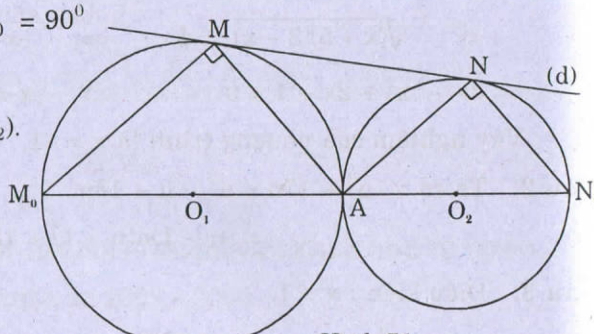
a) Kéo dài O_1O_2 cắt đường tròn (O_1) và (O_2) tại hai điểm M_0, N_0.

Ta có : $\widehat{ANN_0} = \widehat{AMM_0} = 90^0$

Suy ra $MN \le M_0N_0$.

Hay $MN \le 2(R_1 + R_2)$.

Vậy độ dài lớn nhất của đoạn MN là $2(R_1 + R_2)$ đạt được khi d đi qua O_1 và O_2.



Hình 71

b) Gọi I_0 là trung điểm của M_0N_0.

Do $R_1 > R_2 \Rightarrow AM_0 > AN_0$ nên I_0 nằm trong đoạn AM_0.

Vì $\Delta AMM_0 \backsim \Delta ANN_0$ nên AM < AN, suy ra I nằm trong đoạn AM

Phần thuận :

Ta có : $\dfrac{AI}{AM} = \dfrac{IN - AN}{AM} = \dfrac{IM}{AM} - \dfrac{AN}{AM} = \dfrac{AM - AI}{AM} - \dfrac{AN}{AM} = 1 - \dfrac{AI}{AM} - \dfrac{AN}{AM}$

$$\Rightarrow \quad 2\left(\frac{AI}{AM}\right) = 1 - \frac{AN}{AM} \qquad (1)$$

Tương tự, ta có : $2\left(\dfrac{AI_0}{AM_0}\right) = 1 - \dfrac{AN_0}{AM_0}$ (2)

Vì $\Delta ANN_0 \backsim \Delta AMM_0$ nên $\dfrac{AN}{AM} = \dfrac{AN_0}{AM_0}$,

do đó từ (1) và (2) suy ra : $\dfrac{AI}{AM} = \dfrac{AI_0}{AM_0}$.

Do đó : $II_0 \,//\, MM_0 \Rightarrow \widehat{AII_0} = 90^0$.

Vậy tập hợp điểm I là đường tròn đường kính AI_0.

Phần đảo : Do M, N khác A nên I khác A.

Lấy điểm I' trên đường tròn đường kính AI_0 trừ điểm A, đường thẳng AI' cắt đường tròn (O_1) và (O_2) tại M', N'.

Khi đó ta có : $II_0 \perp M'N' \Rightarrow I'I_0 \,//\, M_0M' \,//\, N_0N'$.

$$\Rightarrow \quad \frac{AI'}{AM'} = \frac{AI_0}{AM_0}\ ; \qquad \frac{AI'}{AN'} = \frac{AI_0}{AN_0}.$$

Suy ra I' là trung điểm của M'N'.

Kết luận : Tập tập hợp điểm I là đường tròn đường kính AI_0 trừ điểm A.

ĐỀ 47

TRƯỜNG ĐẠI HỌC VINH

Đề thi tuyển sinh vào lớp 10 khối PTTH chuyên Toán, Tin năm học 2004 – 2005

Câu 1.

1. Tính giá trị của biểu thức : $P = x^3 + y^3 - 3(x + y) + 2004$, biết rằng :

$$x = \sqrt[3]{3 + 2\sqrt{2}} + \sqrt[3]{3 - 2\sqrt{2}}\ ; \qquad y = \sqrt[3]{17 + 12\sqrt{2}} + \sqrt[3]{17 - 12\sqrt{2}}.$$

2. Rút gọn biểu thức sau :

$$P = \frac{1}{1 + \sqrt{5}} + \frac{1}{\sqrt{5} + \sqrt{9}} + \frac{1}{\sqrt{9} + \sqrt{13}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{2001} + \sqrt{2005}}.$$

Câu 2. Giải các phương trình :

1. $x^2 + \sqrt{x + 2004} = 2004$ **2.** $x^3 - 3\sqrt{2}\,x^2 + 3x + \sqrt{2} = 0.$

Câu 3. Giả sử tam giác ABC có diện tích bằng 1, gọi a, b, c và h_a, h_b, h_c tương ứng là độ dài các cạnh và các đường cao của tam giác ABC. Chứng minh rằng : $(a^2 + b^2 + c^2)(h_a^2 + h_b^2 + h_c^2) \geq 36$.

Dấu đẳng thức xảy ra khi nào ?

Câu 4. Cho tam giác ABC có $\widehat{A} = 60^0$, AC = b, AB = c (với b > c). Đường kính EF của đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC vuông góc với BC tại M. Gọi I và J là chân đường vuông góc hạ từ E xuống các đường thẳng AB và AC. Gọi H và K là chân đường vuông góc hạ từ F xuống các đường thẳng AB và AC.

1. Chứng minh các tứ giác AIEJ và CMJE nội tiếp.
2. Chứng minh I, J, M thẳng hàng và IJ vuông góc với HK.
3. Tính độ dài cạnh BC và bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC theo b, c.
4. Tính IH + JK theo b, c.

BÀI GIẢI

Câu 1.

1. Vì $x = \sqrt[3]{3+2\sqrt{2}} + \sqrt[3]{3-2\sqrt{2}} \Rightarrow x^3 = 6 + 3(\sqrt[3]{3+2\sqrt{2}} + \sqrt[3]{3-2\sqrt{2}})$.

Do đó $x^3 = 6 + 3x$. Suy ra $x^3 - 3x = 6$.

Tương tự ta có $y^3 - 3y = 34$.

Vậy $P = (x^3 - 3x) + (y^3 - 3y) + 2004 = 6 + 34 + 2004 = 2044$.

2. Ta có : $$P = \frac{\sqrt{5}-1}{5-1} + \frac{\sqrt{9}-\sqrt{5}}{9-5} + \ldots + \frac{\sqrt{2005}-\sqrt{2001}}{2005-2001}$$
$$= \frac{1}{4}(\sqrt{5} - 1 + \sqrt{9} - \sqrt{5} + \ldots + \sqrt{2005} - \sqrt{2001}) = \frac{\sqrt{2005}-1}{4}$$

Vậy $P = \dfrac{\sqrt{2005}-1}{4}$.

Câu 2.

1. Điều kiện : $x \geq -2004$.

Đặt $t = \sqrt{x + 2004} \Rightarrow t^2 - x = 2004$ $(t \geq 0)$, ta có hệ sau :

$$\begin{cases} x^2 + t = 2004 \\ t^2 - x = 2004 \end{cases}$$

$\Rightarrow$ $t^2 - x - x^2 - t = 0$ (lấy phương trình đầu trừ phương trình cuối)

$\Leftrightarrow$ $(t + x)(t - x - 1) = 0$ $\Leftrightarrow$ $t = -x$ hoặc $t = x + 1$.

Với $t = -x$, ta có : $x^2 - x - 2004 = 0$

$$\Rightarrow \quad x = \frac{1+\sqrt{8017}}{2} \quad \text{hoặc} \quad x = \frac{1-\sqrt{8017}}{2}.$$

Với $t = x + 1$, ta có : $(x + 1)^2 - x = 2004 \Leftrightarrow x^2 + x - 2003 = 0$

$$\Rightarrow \quad x = \frac{-1+\sqrt{8013}}{2} \quad \text{hoặc} \quad x = \frac{-1-\sqrt{8013}}{2}.$$

So với điều kiện $t \geq 0$ ta nhận 2 nghiệm :

$$x = \frac{1-\sqrt{8017}}{2}, \quad x = \frac{-1+\sqrt{8013}}{2}.$$

2. $x^3 - 3\sqrt{2}x^2 + 3x + \sqrt{2} = 0 \Leftrightarrow (x - \sqrt{2})(x^2 - 2\sqrt{2}x - 1) = 0$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \sqrt{2} \\ x = \sqrt{2} - \sqrt{3} \\ x = \sqrt{2} + \sqrt{3} \end{array}\right.$$

Vậy phương trình đã cho có 3 nghiệm là :

$$x_1 = \sqrt{2}; \quad x_2 = \sqrt{2} - \sqrt{3}; \quad x_3 = \sqrt{2} + \sqrt{3}.$$

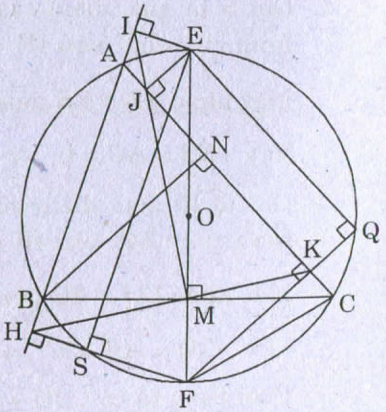
Câu 3. Áp dụng bất đẳng thức Côsi cho ba số dương, ta có :

$$a^2 + b^2 + c^2 \geq 3\sqrt[3]{(abc)^2};$$
$$h_a^2 + h_b^2 + h_c^2 \geq 3\sqrt[3]{(h_a h_b h_c)^2}.$$

Suy ra : $(a^2 + b^2 + c^2)(h_a^2 + h_b^2 + h_c^2) \geq 9\sqrt[3]{(ah_a.bh_b.ch_c)^2} = 36$.

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow$ $a = b = c = \sqrt{\dfrac{4\sqrt{3}}{3}}$.

Câu 4. *(Hình 72)*



Hình 72

1. Ta có : $\widehat{AIE} = \widehat{AJE} = 90^0$.

Suy ra tứ giác AIEJ nội tiếp đường tròn đường kính AE.

Ta có : $\widehat{CME} = \widehat{CJE} = 90^0$.

Suy ra tứ giác CMJE nội tiếp đường tròn đường kính CE.

2. Ta có : $\widehat{IEM} = \widehat{AEC}$ (cùng bù với $\widehat{ABC}$)

Suy ra $\widehat{AEI} = \widehat{CEM}$.

Mặt khác : $\widehat{AEI} = \widehat{AJI}$ (cùng chắn $\overset{\frown}{AI}$);

$\widehat{CEM} = \widehat{CJM}$ (cùng chắn $\overset{\frown}{CM}$).

Suy ra $\widehat{CJM} = \widehat{AJI}$.

Mà I, M nằm về hai phía của đường thẳng AC nên I, J M thẳng hàng.

Tương tự như trên ta chứng minh được H, K, M thẳng hàng.

Do tứ giác CFMK nội tiếp, suy ra $\widehat{CFK} = \widehat{CMK}$.

Do tứ giác CMJE nội tiếp, suy ra $\widehat{JME} = \widehat{JCE}$

Mặt khác $\widehat{ECF} = 90^0$, suy ra $\widehat{CFK} = \widehat{JCE}$ (cùng bằng $90^0 - \widehat{ACF}$)

Từ đó ta có : $\widehat{CMK} = \widehat{JME}$

$\Rightarrow \quad \widehat{JMK} = \widehat{EMC} = 90^0$, hay $IJ \perp HK$.

3. Kẻ $BN \perp AC$, vì $\widehat{BAC} = 60^0$ nên $\widehat{ABN} = 30^0 \Rightarrow AN = \dfrac{AB}{2} = \dfrac{c}{2}$.

Suy ra : $BN^2 = AB^2 - AN^2 = \dfrac{3c^2}{4}$.

Ta có : $BC^2 = BN^2 + CN^2 = \dfrac{3c^2}{4} + \left(b - \dfrac{c}{2}\right)^2 = b^2 + c^2 - bc$

$\Rightarrow \quad BC = \sqrt{b^2 + c^2 - bc}$.

Tam giác đều BCE có :

$$R = CE = \frac{2}{3}EM = \frac{2BC\sqrt{3}}{3.2} = \frac{1}{3}\sqrt{3(b^2 + c^2 - bc)}.$$

4. Gọi S là giao điểm của FH với đường tròn (O). Ta có tứ giác HSIE là hình chữ nhật nên IH = ES.

Mặt khác AB // ES nên $\overset{\frown}{AB} = \overset{\frown}{BS}$, mà $\overset{\frown}{BE} = \overset{\frown}{CE}$ nên $\overset{\frown}{EBS} = \overset{\frown}{AEC}$.

Vậy ES = AC = b $\Rightarrow$ IH = b.

Gọi Q là giao điểm của FK với đường tròn (O) thì tứ giác EJKQ là hình chữ nhật nên JK = EQ.

Mặt khác EQ // AC nên $\overset{\frown}{AE} = \overset{\frown}{CQ}$ mà $\overset{\frown}{BE} = \overset{\frown}{CE}$ nên $\overset{\frown}{EQ} = \overset{\frown}{AB}$.

Vậy EQ = AB = c $\Rightarrow$ JK = b.

Cuối cùng ta có : IH + JK = b + c.

ĐỀ 48

TRƯỜNG ĐẠI HỌC VINH

Đề thi tuyển sinh vào lớp 10 khối PTTH chuyên Toán, Tin năm học 2002 – 2003

Câu 1. Chứng minh rằng luôn tồn tại một số có dạng 20022002...2002, mà số đó chia hết cho 2003.

Câu 2. Giải phương trình : $(x + 9)(x + 10)(x + 11) - 8x = 0$.

Câu 3. Chứng minh rằng nếu a, b, c là các số thực dương thỏa mãn điều kiện $abc = ab + bc + ca$ thì :

$$\frac{1}{a + 2c + 3c} + \frac{1}{2a + 3b + c} + \frac{1}{3a + b + 2c} < \frac{3}{16}.$$

Câu 4. Giải và biện luận phương trình :

$$\sqrt[3]{(x - m)^2} + (m - 1)\sqrt[3]{x^2 - m^2} = m\sqrt{(x + m)^2},$$ trong đó m là tham số.

Câu 5. Giả sử H là trực tâm của tam giác nhọn ABC. Trên đoạn HB và HC lấy hai điểm M, N sao cho các góc AMC và ANB đều vuông. Chứng minh rằng AN = AM.

BÀI GIẢI

Câu 1. Ta xét 2004 số có dạng : $a_n = 20022002...2002$, gồm n số 2002 viết liên tiếp nhau, với $1 \le n \le 2004$.

Theo nguyên lí Dirichlet, tồn tại hai số a_k, a_t mà hiệu $a_k - a_t$ chia hết cho 2003, với $1 \le t \le k \le 2004$.

Ta có : $a_k - a_t = 10^{4t}.a_{k-t}$. Mà 10^{4t} và 2003 nguyên tố cùng nhau nên a_{k-t} chia hết cho 2003 (đpcm).

Câu 2. $(x + 9)(x + 10)(x + 11) - 8x = 0$

Đặt $t = x + 15$. Phương trình đã cho có trở thành :

$(t - 4)(t - 5)(t - 6) - 8(t - 15) = 0$

$\Leftrightarrow \quad t(t^2 - 15t + 66) = 0 \Leftrightarrow t = 0$ (vì $t^2 - 15t + 66 = 0$ vô nghiệm)

Với $t = 0$, ta có : $x = -15$.

Vậy $x = -15$ là nghiệm của phương trình đã cho.

Câu 3. Từ điều kiện $abc = ab + bc + ca$, ta có : $\dfrac{1}{a} + \dfrac{1}{b} + \dfrac{1}{c} = 1$ (1)

Mặt khác với mọi x, y > 0, ta có : $\dfrac{1}{x + y} \le \dfrac{1}{4}\left(\dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y}\right)$ (2)

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow x = y$.

Áp dụng (2) ta có :

$$\frac{1}{a+2b+3c} = \frac{1}{(a+c)+2(b+c)} \leq \frac{1}{4}\left(\frac{1}{a+c} + \frac{1}{2(b+c)}\right)$$

$$\leq \frac{1}{16a} + \frac{1}{16c} + \frac{1}{32b} + \frac{1}{32c} = \frac{1}{16a} + \frac{1}{32b} + \frac{3}{32c}.$$

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow$ $a + c = 2(b + c)$, $a = c$ và $b = c$, tức là khi và chỉ khi $c = 0$ (trái giả thiết).

Vậy $$\frac{1}{a+2b+3c} < \frac{1}{16a} + \frac{1}{32b} + \frac{3}{32c}.$$

Tương tự ta có : $$\frac{1}{2a+3b+c} < \frac{1}{32a} + \frac{3}{32b} + \frac{1}{16c}$$

$$\frac{1}{3a+b+2c} < \frac{3}{32a} + \frac{1}{16b} + \frac{1}{32c}$$

Từ các bất đẳng thức trên và kết hợp với (1) ta được :

$$\frac{1}{a+2b+3c} + \frac{1}{2a+3b+c} + \frac{1}{3a+b+2c} < \left(\frac{1}{16} + \frac{1}{32} + \frac{3}{32}\right)\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right) = \frac{3}{16}.$$

Câu 4. $\sqrt[3]{(x-m)^2} + (m-1)\sqrt[3]{x^2-m^2} = m\sqrt[3]{(x+m)^2}$

$\Leftrightarrow$ $\sqrt[3]{x-m}(\sqrt[3]{x-m} - \sqrt[3]{x+m}) + m(\sqrt[3]{x-m} - \sqrt[3]{x+m}).\sqrt[3]{x+m} = 0$

$\Leftrightarrow$ $(\sqrt[3]{x-m} - \sqrt[3]{x+m})(\sqrt[3]{x-m} + m\sqrt[3]{x+m}) = 0$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} \sqrt[3]{x-m} - \sqrt[3]{x+m} = 0 & (1) \\ \sqrt[3]{x-m} + m\sqrt[3]{x+m} = 0 & (2) \end{array}\right.$$

Ta có : (2) $\Leftrightarrow$ $\sqrt[3]{x-m} = -m\sqrt[3]{x+m}$

$\Leftrightarrow$ $(1 + m^3)x = m(1 - m^3)$ (3)

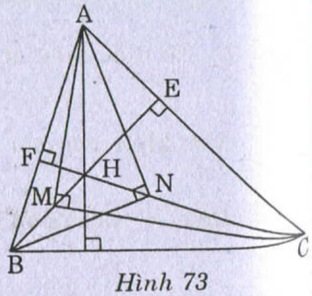
Giải (1), (3) và tổng hợp kết quả, ta được :

- $m = 0$: phương trình đã cho nhận mọi giá trị thực x làm nghiệm.
- $m = -1$: phương trình đã cho vô nghiệm.
- $m \neq 0$ và $m \neq -1$: phương trình đã cho có một nghiệm là $x = \dfrac{m(1-m^3)}{1+m^3}$.

Câu 5. *(Hình 73)*

Vì tam giác ANB vuông tại N, với đường cao NF, ta có : $AN^2 = AF.AB$ (1)

Do tam giác AMC vuông tại M, với đường cao ME, ta có : $AM^2 = AE.AC$ (2)



Hình 73

Ngoài ra $\Delta AEB \backsim \Delta AFC$ (g-c). Ta có : $\dfrac{AE}{AB} = \dfrac{AF}{AC}$ (3)

Từ (1), (2) và (3), suy ra : $AM = AN$.

ĐỀ 49

TRƯỜNG PTTH NĂNG KHIẾU TRẦN PHÚ, HẢI PHÒNG

Đề thi tuyển sinh vào lớp 10 chuyên toán năm học 2005 – 2006

Câu 1. Cho biểu thức : $P = \dfrac{x^2}{(x+y)(1-y)} - \dfrac{y^2}{(x+y)(1+x)} - \dfrac{x^2y^2}{(1+x)(1-y)}$.

1. Tìm điều kiện x, y để P xác định. Rút gọn P.
2. Tìm x, y nguyên thỏa mãn phương trình P = 2.

Câu 2. Cho phương trình : $(x + m - 2)[x^2 + 2(m + 2)x + 4m - 8] = 0$ (1)

1. Giải phương trình (1) khi m = 2.
2. Tìm tất cả các giá trị m để phương trình (1) có hai nghiệm dương và một nghiệm âm.

Câu 3.

1. Cho hệ phương trình : $\begin{cases} mx + y = -1 \\ x + y = -m \end{cases}$

   Tìm m để hệ có nghiệm duy nhất (x; y) thỏa mãn : $y^2 = x$.
2. Cho a, b, c > 1. Chứng minh rằng : $\dfrac{a}{\sqrt{b}-1} + \dfrac{b}{\sqrt{c}-1} + \dfrac{c}{\sqrt{a}-1} \geq 12$.

   Đẳng thức xảy ra khi nào ?

Câu 4. Cho đường tròn tâm O đường kính AB = 2R và C là một điểm thuộc đường tròn ($C \neq A$; $C \neq B$). Trên nửa mặt phẳng bờ AB có chứa điểm C, kẻ tia Ax tiếp xúc với đường tròn (O). Gọi M là điểm chính giữa cung nhỏ AC. Tia BC cắt Ax tại Q, tia AM cắt BC tại N.

1. Chứng minh các tam giác BAN và MCN cân.
2. Khi MB = MQ. Tính BC theo R.

Câu 5.

1. Gọi S(n) là tổng tất cả các số lẻ lớn nhất của các số tự nhiên : 1, 2, 3, ..., 2^n ($n \geq 0$). Chứng minh rằng : $S(n) = \dfrac{4^n + 2}{3}$.
2. Cho tam giác ABC. Một đường thẳng (d) quay quanh điểm A sao cho B và C nằm về một phía của (d). Gọi B_1, C_1 tương ứng là hình chiếu

vuông góc của B và C trên (d). M là điểm thuộc (d) sao cho M và B nằm về hai phía của AC và AM. $B_1C_1 = k > 0$ cho trước. Chứng minh rằng khi (d) thay đổi, M luôn thuộc một đường thẳng cố định.

BÀI GIẢI

Câu 1. Điều kiện : $x + y \neq 0$, $x \neq -1$; $y \neq 1$.

$$P = \frac{x^2}{(x+y)(1-y)} - \frac{y^2}{(x+y)(1+x)} - \frac{x^2y^2}{(1+x)(1-y)}$$

$$= \frac{x^2(1+x) - y^2(1-y) - x^2y^2(x+y)}{(x+y)(1+x)(1-y)} = \frac{x^2 - y^2 + x^3 + y^3 - x^2y^2(x+y)}{(x+y)(1+x)(1-y)}$$

$$= \frac{(x+y)(x - y + x^2 - xy + y^2 - x^2y^2)}{(x+y)(1+x)(1-y)} = \frac{(x+y)(1-y)[x^2(1+y) + x - y]}{(x+y)(1-y)(1+x)}$$

$$= \frac{(x+y)(1-y)(1+x)(x+xy-y)}{(x+y)(1-y)(1+x)}$$

Vậy $P = x + xy - y$.

Khi $P = 2 \Leftrightarrow x + xy - y = 2 \Leftrightarrow x + xy - y - 1 = 1$

$\Leftrightarrow (x-1)(y+1) = 1$

Vì x và y nguyên nên ta tìm được (x; y) là : (2; 0), (0; −2).

Câu 2.

1. Khi m = 2, (1) trở thành : $x(x^2 + 8x) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = -8 \end{array}\right.$

Vậy nghiệm của phương trình khi m = 2 là : x = 0; x = −8.

2. $(x + m - 2)[x^2 + 2(m+2)x + 4m - 8] = 0$ (1)

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 2 - m \\ g(x) = x^2 + 2(m+2)x + 4m - 8 = 0 \quad (2) \end{array}\right.$

- Với m = 2, (1) không có nghiệm dương nên không thỏa mãn.
- Với m > 2, nghiệm x = 2 − m < 0.

Mặt khác (2) có : $\begin{cases} \Delta' = m^2 + 12 > 0 \\ S = -2(m+2) < 0 \\ P = 4m - 8 > 0 \end{cases}$

Nên (2) có hai nghiệm âm tức là (1) không có nghiệm dương. Do đó m > 2 không thỏa mãn.

- Với m < 2, nghiệm x = 2 − m > 0. Mặt khác (2) có P = 4m − 8 < 0 nên (2) có hai nghiệm trái dấu. Vì m < 2 nên $g(2 - m) = 4 - m^2 \neq 0$, suy ra x = 2 − m không phải là nghiệm của (2).

Vậy với m < 2 thì (1) có hai nghiệm dương và một nghiệm âm.

Câu 3.

1. $\begin{cases} mx + y = -1 \\ x + y = -m \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (m-1)x = m - 1 \\ y = -x - m \end{cases}$

Hệ có nghiệm duy nhất ⇔ m ≠ 1.

Khi đó nghiệm của hệ là : x = 1; y = −m − 1.

Do đó : $y^2 = x \Leftrightarrow (m+1)^2 = 1 \Leftrightarrow m = 0;\ m = -2$.

2. Áp dụng bất đẳng thức Côsi ta có :

$$\frac{a}{\sqrt{b} - 1} + \frac{b}{\sqrt{c} - 1} + \frac{c}{\sqrt{a} - 1} \geq 3\sqrt[3]{\frac{a}{\sqrt{b} - 1} \cdot \frac{b}{\sqrt{c} - 1} \cdot \frac{c}{\sqrt{a} - 1}}.$$

Nhận xét rằng : Với mọi x > 1, ta có : $(\sqrt{x} - 2)^2 \geq 0 \Rightarrow \frac{x}{\sqrt{x} - 1} \geq 4$.

Áp dụng nhận xét trên ta có : $3\sqrt[3]{\frac{a}{\sqrt{b} - 1} \cdot \frac{b}{\sqrt{c} - 1} \cdot \frac{c}{\sqrt{a} - 1}} \geq 3\sqrt[3]{4.4.4} = 12$.

Suy ra : $\frac{a}{\sqrt{b} - 1} + \frac{b}{\sqrt{c} - 1} + \frac{c}{\sqrt{a} - 1} \geq 12$.

Đẳng thức xảy ra khi a = b = c = 4.

Câu 4. *(Hình 74)*

Ta có : $\widehat{AMB} = \widehat{NMB} = 90^0$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn).

Vì M là trung điểm của cung nhỏ BC nên :

$\widehat{ABM} = \widehat{MBN}$,

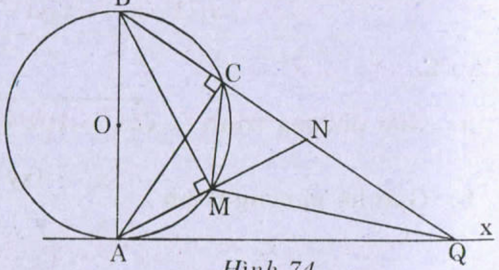
suy ra $\widehat{MAB} = \widehat{MNB}$.

Do đó ΔBAN cân tại B.

Mặt khác tứ giác ABCM là tứ giác nội tiếp nên ta có :

$\widehat{MCN} = \widehat{MAB} = \widehat{MNB}$

Vậy tam giác MCN cân tại M.



Hình 74

Câu 5. *(Hình 75)*

1. Ta có : $\{1; 2; 3; ...; 2^n\} = \{1; 3; 5; ...; 2^n - 1\} \cup \{2.1; 2.2; 2.3 ...2.2^{n-1}\}$

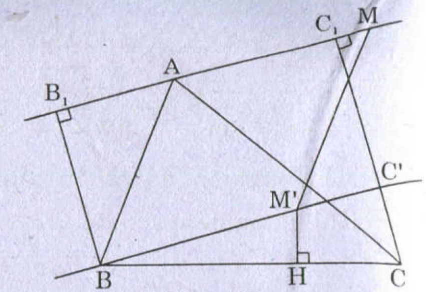
Tổng các ước số lẻ lớn nhất của các số 2.1; 2.2; 2.3; ..; 2.2^{n-1} chính là tổng các ước lẻ lớn nhất của các số 1; 2; 3; ...; 2^{n-1} nên tổng này chính là S(n − 1).

Suy ra : $S(n) = 1 + 3 + 5 + ... + (2^n - 1) + S(n-1)$

$$= \frac{(1 + 2^n - 1)}{2} + S(n-1) = 4^{n-1} + S(n-1)$$

Chứng minh bằng quy nạp ta được :

$$S(n) = \frac{4^n + 2}{3}$$



Hình 75

2. Qua B kẻ đường thẳng (d') song song với (d) và cắt CC_1 tại C'. Lấy điểm M' thuộc (d') sao cho tứ giác ABM'M là hình bình hành. Kẻ M'H vuông góc với BC tại H. Ta có :

$$AM.B_1C_1 = BM'.BC = BC.BH = k > 0, \text{ không đổi.}$$

Suy ra H cố định, suy ra M' thuộc đường thẳng qua H, vuông góc với BC (cố định) dẫn đến M cùng thuộc một đường thẳng cố định.

ĐỀ 50

TRƯỜNG PTTH NĂNG KHIẾU TRẦN PHÚ, HẢI PHÒNG

Đề thi tuyển sinh vào lớp 10 năm học 2002 – 2003

Câu 1. Cho phương trình ẩn x : $x^2 - 2(m + 1)x + m - 4 = 0$ (1)

a) Chứng minh rằng phương trình (1) có 2 nghiệm phân biệt. Tìm m để phương trình đó có 2 nghiệm dương.

b) Gọi x_1, x_2 là nghiệm của phương trình (1). Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức : $M = \dfrac{x_1^2 + x_2^2}{x_1(1 - x_2) + x_2(1 - x_1)}$.

Câu 2.

a) Giải phương trình : $\sqrt{5x^2 + 10x + 1} = 7 - (x^2 + 2x)$.

b) Giải hệ phương trình : $\begin{cases} x^2 - 4xy + x + 4y = 2 \\ x^2 + y^2 = 5 \end{cases}$

Câu 3. Cho ba số dương x, y, z có tổng bằng 1. Chứng minh rằng :

$$\sqrt{x + yz} + \sqrt{y + zx} + \sqrt{z + xy} \geq 1 + \sqrt{xy} + \sqrt{yz} + \sqrt{zx}.$$

Câu 4. Trên đường tròn tâm O, đường kính AB, lấy điểm P bất kì khác A, B. Dựng hình vuông APQR sao cho tam giác APB và hình vuông này thuộc cùng một nửa mặt phẳng bờ AP.

a) Chứng minh rằng tâm I của đường tròn nội tiếp tam giác APB và ba điểm A,B, Q cùng thuộc một đường tròn.

b) Gọi H là hình chiếu vuông góc của P trên AB và R_1, R_2, R_3 là bán kính đường tròn nội tiếp các tam giác APB, APH, BPH tương ứng. Xác định vị trí của P trên đường tròn (O) để tổng $R_1 + R_2 + R_3$ đạt giá trị lớn nhất.

Câu 5. Với n là số nguyên dương, đặt $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} k!(k^2 + 3k + 1)$,

trong đó $k! = 1.2...k$ và $\sum\limits_{k=1}^{n} a_k = a_1 + a_2 + ... + a_n$.

Tìm số dư khi chia S_{400} cho 2005.

BÀI GIẢI

Câu 1. $x^2 - 2(m + 1)x + m - 4 = 0$ (1)

a) Ta có $\Delta' = (m + 1)^2 - (m - 4) = m^2 + m + 5 > 0$ với mọi m.

(1) có hai nghiệm đều dương $\Leftrightarrow$ $m + 1 > 0$ và $m - 4 > 0$ $\Rightarrow$ $m > 4$.

Vậy với m > 4 phương trình (1) có hai nghiệm đều dương.

b) Theo định lí Viet ta có :

$$x_1 + x_2 = 2(m + 1); \quad x_1.x_2 = m - 4.$$

Do đó $$M = \frac{x_1^2 + x_2^2}{x_1(1 - x_2) + x_2(1 - x_1)} = \frac{(x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2}{(x_1 + x_2) - 2x_1x_2}$$

$$= \frac{4(m + 1)^2 - 2(m - 4)}{2(m + 1) - 2(m - 4)} = \frac{2m^2 + 3m + 6}{5} = \frac{2}{5}\left(m^2 + \frac{3}{2}m + 3\right)$$

$$= \frac{2}{5}\left[\left(m + \frac{3}{4}\right)^2 + \frac{39}{16}\right] = \frac{2}{5}\left(m + \frac{3}{4}\right)^2 + \frac{39}{40} \geq \frac{39}{40}.$$

Vậy giá trị nhỏ nhất của M là $\dfrac{39}{40}$ đạt được khi $m = -\dfrac{3}{4}$.

Câu 2.

a) Đặt $\sqrt{5x^2 + 10x + 1} = t$ $(t \geq 0)$ $\Rightarrow$ $x^2 + 2x = \dfrac{t^2 - 1}{5}$.

Phương trình đã cho trở thành :

$$t^2 + 5t - 36 = 0 \Leftrightarrow t = 4 \text{ và } t = -9 \text{ (loại)}$$

Với t = 4 thì $x^2 + 2x - 3 = 0$ $\Leftrightarrow$ $x_1 = -3$; $x_2 = 1$.

Vậy phương trình có hai nghiệm là : $x_1 = -3$; $x_2 = 1$.

b) $\begin{cases} x^2 - 4xy + x + 4y = 2 \\ x^2 + y^2 = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x - 1)(x - 4y + 2) = 0 \\ x^2 + y^2 = 5 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x - 1 = 0 \\ x^2 + y^2 = 5 \end{cases} \quad (I) \\ \begin{cases} x = 4y - 2 \\ x^2 + y^2 = 5 \end{cases} \quad (II) \end{array}\right.$$

Giải hệ (I) và (II) ta được các nghiệm (x; y) của hệ là :

$$(1; 2), (1; -2), (2; 1), \left(-\frac{38}{17}; -\frac{1}{17}\right).$$

Câu 3. Ta chứng minh $\sqrt{x + yz} \geq x + \sqrt{yz}$ (1)

$(1) \Leftrightarrow \quad x + yz \geq x^2 + 2x\sqrt{yz} + yz \quad \Leftrightarrow \quad 1 \geq x + 2\sqrt{yz}$

$\Leftrightarrow \quad x + y + z \geq x + 2\sqrt{yz} \quad \Leftrightarrow \quad y + z \geq 2\sqrt{yz}$

$\Leftrightarrow \quad (\sqrt{y} - \sqrt{z})^2 \geq 0.$ Do đó (1) đúng.

Tương tự ta có : $\sqrt{y + zx} \geq y + \sqrt{zx}$ (2)

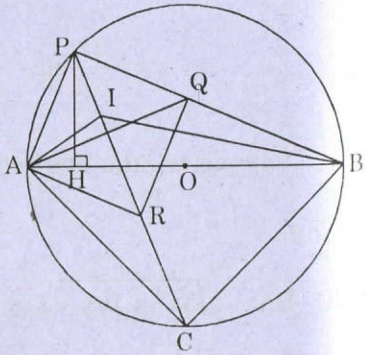
$\sqrt{z + xy} \geq z + \sqrt{xy}$ (3).

Từ (1), (2) và (3), suy ra :

$$\sqrt{x + yz} + \sqrt{y + zx} + \sqrt{z + xy} \geq 1 + \sqrt{xy} + \sqrt{yz} + \sqrt{zx}$$

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow \quad x = y = z = \frac{1}{3}$.

Câu 4. *(Hình 76)*



Hình 76

a) Gọi C là giao điểm thứ hai của tia PR với đường tròn tâm O. Dễ thấy C là điểm chính giữa cung $\overset{\frown}{ACB}$. Do đó các tam giác ACI, BCI cân tại C, suy ra CA = CI, CB = CI.

Tứ giác APQR là hình vuông nên C thuộc trung trực đoạn AQ, do đó CA = CQ.

Vậy A, B, I, Q cùng thuộc một đường tròn.

b) Gọi p_1, p_2, p_3 lần lượt là nửa chu vi của các tam giác APB, APH, BPH.

Ta có : $R_1 = p_1 - AB$; $\quad R_2 = p_2 - PA$; $\quad R_3 = p_3 - PB$.

Suy ra : $R_1 + R_2 + R_3 = p_1 + p_2 + p_3 - (AB + PA + PB)$

$$= PH \leq OP = R \quad (\text{với } R = \frac{1}{2}AB).$$

Do đó $R_1 + R_2 + R_3$ lớn nhất khi và chỉ khi $H \equiv O \Leftrightarrow P \equiv C$ hoặc P trùng với D là điểm xuyên tâm đối của C.

Câu 5. Ta có :

$$S_{400} = \sum_{k=1}^{400} k!(k^2 + 3k + 1) = \sum_{k=1}^{400} k![(k + 1)(k + 2) - 1] = \sum_{k=1}^{400} [(k + 2)! - k!]$$

$$= (3! + 4! + ... + 402!) - (1! + 2! + ... + 400!) = 401! + 402! - (1! + 2!)$$

$$= (401!.403) - 2005 + 2002$$

Vì $2005 = 5.401$ nên $401! \,\vdots\, 2005$.

Vậy số dư của phép chia S_{400} cho 2005 là 2002.

ĐỀ 51

TRƯỜNG QUỐC HỌC HUẾ

Đề thi tuyển sinh vào lớp 10 năm học 2004 – 2005

Câu 1. Cho biểu thức : $A = \sqrt{\frac{b}{a}} - \frac{\sqrt{ab} - \sqrt{a^2}}{a}$.

1. Tìm điều kiện đối với a, b để biểu thức A được xác định.

2. Rút gọn biểu thức A.

Câu 2.

1. Giải hệ phương trình $\begin{cases} x^2 + 3y = 1 \\ 3x^2 - y = 1 \end{cases}$

2. Giải bất phương trình : $x + |x - 1| > 5$.

Câu 3. Chứng minh rằng, nếu phương trình $x^2 + 2mx + n = 0$ (1)

có nghiệm thì phương trình : $x^2 + 2\left(k + \frac{1}{k}\right)mx + n\left(k + \frac{1}{k}\right)^2 = 0$ (2)

cũng có nghiệm. (m, n, k là các tham số và $k \neq 0$).

Câu 4. Cho hàm số $y = ax + b$ có đồ thị (D) và hàm số $y = kx^2$ có đồ thị (P).

a) Tìm a, b biết rằng (D) đi qua A(–1; 3) và B(2; 0).

b) Tìm $k \neq 0$ sao cho (P) tiếp xúc với đường thẳng (D) vừa tìm được. Viết phương trình của (P).

Câu 5. Cho tam giác ABC không cân có ba góc nhọn nội tiếp trong đường tròn tâm O. Hai đường cao AI và BE cắt nhau tại H.

1. Chứng minh $\widehat{CHI} = \widehat{CBA}$. **2.** Chứng minh $EI \perp CO$.

3. Cho $\widehat{ACB} = 60^0$. Chứng minh CH = CO.

BÀI GIẢI

Câu 1.

1. Điều kiện đối với a, b để biểu thức A được xác định là : $\begin{cases} ab \ge 0 \\ a \ne 0 \end{cases}$

2. Với $ab \ge 0$ và $a > 0$, ta có :

$$A = \sqrt{\frac{b}{a}} - \frac{\sqrt{ab} - \sqrt{a^2}}{a} = \frac{\sqrt{ab}}{a} - \frac{\sqrt{ab} - \sqrt{a^2}}{a} = \frac{\sqrt{ab} - \sqrt{ab} + \sqrt{a^2}}{a} = 1.$$

Với $ab \ge 0$ và $a < 0$ thì $b \le 0$. Do đó :

$$A = \sqrt{\frac{b}{a}} - \frac{\sqrt{ab} - \sqrt{a^2}}{a} = \frac{\sqrt{ab}}{|a|} - \frac{\sqrt{ab} - \sqrt{a^2}}{a} = \frac{-2\sqrt{ab} - a}{a} = \frac{-2\sqrt{ab}}{a} - 1.$$

Câu 2.

1. $\begin{cases} x^2 + 3y = 1 \\ 3x^2 - y = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 10x^2 = 4 \\ x^2 + 3y = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} |x| = \dfrac{\sqrt{10}}{5} \\ \dfrac{2}{5} + 3y = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} |x| = \dfrac{\sqrt{10}}{5} \\ y = \dfrac{1}{5} \end{cases}$

Vậy hệ trên có nghiệm (x; y) là $\left(\dfrac{\sqrt{10}}{5}; \dfrac{1}{5}\right); \left(-\dfrac{\sqrt{10}}{5}; \dfrac{1}{5}\right)$.

2. $x + |x - 1| > 5 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x < 1 \\ x + 1 - x > 5 \end{cases} \\ \begin{cases} x \ge 1 \\ x + x - 1 > 5 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x < 1 \\ 1 > 5 \end{cases} \\ \begin{cases} x \ge 1 \\ 2x > 6 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \begin{cases} x \ge 1 \\ x > 3 \end{cases} \Leftrightarrow x > 3.$

Câu 3. Phương trình $x^2 + 2mx + n = 0$ có nghiệm $\Leftrightarrow \Delta_1' = m^2 - n \ge 0$.

Phương trình $x^2 + 2\left(k + \dfrac{1}{k}\right)mx + n\left(k + \dfrac{1}{k}\right)^2 = 0$ có biệt thức là :

$$\Delta_2' = \left(k + \frac{1}{k}\right)^2 m^2 - n\left(k + \frac{1}{k}\right)^2 = \left(k + \frac{1}{k}\right)^2 (m^2 - n) \ge 0.$$

Vậy phương trình $x^2 + 2\left(k + \dfrac{1}{k}\right)mx + n\left(k + \dfrac{1}{k}\right)^2 = 0$ cũng có nghiệm.

Câu 4.

1. Vì (D) đi qua A(–1; 3) và B(2; 0) nên : $\begin{cases} -a + b = 3 \\ 2a + b = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -1 \\ b = 2 \end{cases}$

2. Phương trình hoành độ giao điểm của (D) và (P) là :

$$kx^2 = -x + 2 \quad \Leftrightarrow \quad kx^2 + x - 2 = 0 \ (k \ne 0) \qquad (*)$$

Đường thẳng (D) tiếp xúc với parabol (P) khi và chỉ khi (*) có nghiệm kép $\Leftrightarrow \quad \Delta = 0 \quad \Leftrightarrow \quad 1 + 8k = 0 \quad \Leftrightarrow \quad k = -\dfrac{1}{8}$.

Phương trình của (P) là : $y = -\dfrac{1}{8}x^2$.

Câu 5. *(Hình 77)*

1. Nối CH cắt AB tại F.

Vì H là trực tâm của tam giác ABC nên $CF \perp AB$.

Ta có : $\widehat{CHI} = 90^0 - \widehat{HCI} = 90^0 - \widehat{FBC} = \widehat{CBA}$.

2. Kẻ đường kính CD của đường tròn (O).

Ta có : $\widehat{BCD} = \widehat{BAD} = \widehat{ABE} = \widehat{FCE} = \widehat{AIE}$.

Mà : $\widehat{AIE} + \widehat{EIC} = 90^0$ nên :

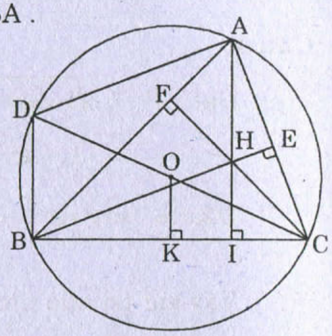
$\widehat{BCD} + \widehat{EIC} = 90^0$ hay $CD \perp EI$.

3. Ta có $\widehat{CHE} = \widehat{CAB} = \widehat{CDB}$ nên hai tam giác vuông CHE và CDB đồng dạng.

Suy ra $\dfrac{CH}{CD} = \dfrac{CE}{CB}$ (1)

Do $\widehat{ACB} = 60^0$ nên $\widehat{EBC} = 30^0 \Rightarrow CE = \dfrac{CB}{2}$.

Từ (1) có $\dfrac{CH}{CD} = \dfrac{1}{2}$, suy ra CH = CD.



Hình 77

ĐỀ 52

TRƯỜNG QUỐC HỌC HUẾ

Đề thi tuyển sinh vào lớp 10 năm học 2002 – 2003

Câu 1.

a) Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức : $\sqrt{1 + 4x + 4x^2} + \sqrt{4x^2 - 12x + 9}$.

b) Chứng tỏ rằng : $\sqrt[3]{70 - \sqrt{4091}} + \sqrt[3]{70 + \sqrt{4091}} = 5$.

Câu 2. Cho hệ phương trình : $\begin{cases} x^4 + y^2 = \dfrac{697}{81} & (1) \\ x^2 + y^2 + xy - 3x - 4y + 4 = 0 & (2) \end{cases}$

a) Nếu có (x; y) thỏa mãn (2), chứng minh rằng : $1 \le y \le \frac{7}{3}$.

b) Giải hệ phương trình trên.

Câu 3. Có tồn tại hay không hai số nguyên x, y sao cho : $3x^2 + 7y^2 = 2002$?

Câu 4. Trên mặt phẳng cho đa giác lồi có 12 cạnh. Có bao nhiêu tam giác mà các đỉnh của nó là đỉnh đa giác lồi đã cho ?

Câu 5. Cho hình thoi ABCD có góc $\widehat{BAD} = 40^0$, O là giao điểm hai đường chéo. Gọi H là hình chiếu vuông góc của O trên cạnh AB. Trên tia đối của tia BC, tia đối của tia DC lần lượt lấy các điểm M, N sao cho HM // AN. Tính số đo góc MON.

BÀI GIẢI

Câu 1.

a) Đặt $P = \sqrt{1 + 4x + 4x^2} + \sqrt{4x^2 - 12x + 9} = \sqrt{(1 + 2x)^2} + \sqrt{(3 - 2x)^2}$

$$= |1 + 2x| + |3 - 2x| \ge |1 + 2x + 3 - 2x| = 4.$$

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow$ $(1 + 2x)(3 - 2x) \ge 0$ $\Leftrightarrow$ $-\frac{1}{2} \le x \le \frac{3}{2}$.

Vậy giá trị nhỏ nhất của P là 4, đạt được khi $-\frac{1}{2} \le x \le \frac{3}{2}$.

b) Đặt $x_0 = \sqrt[3]{70 - \sqrt{4901}} + \sqrt[3]{70 + \sqrt{4901}}$.

Ta có $x_0^3 = (\sqrt[3]{70 - \sqrt{4901}} + \sqrt[3]{70 + \sqrt{4901}})^3$, lúc đó x_0 là nghiệm của phương trình :

$$x^3 = 70 - \sqrt{4901} + 3\sqrt[3]{(70 - \sqrt{4901})(70 + \sqrt{4901})}.x + 70 + \sqrt{4901}$$

$\Leftrightarrow$ $x^3 + 3x - 140 = 0$ $\Leftrightarrow$ $(x - 5)(x^2 - 5x + 28) = 0$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 5 \\ x^2 - 5x + 28 = 0 \text{ (vô nghiệm)} \end{array}\right.$$

Vậy x = 5 hay $\sqrt[3]{70 - \sqrt{4901}} + \sqrt[3]{70 + \sqrt{4901}} = 5$.

Câu 2.

a)
$$\begin{cases} x^4 + y^2 = \dfrac{697}{81} & (1) \\ x^2 + y^2 + xy - 3x - 4y + 4 = 0 & (2) \end{cases}$$

(2) $\Leftrightarrow x^2 + (y - 3)x + (y - 2)^2 = 0$ (*)

(*) có nghiệm $\Leftrightarrow \Delta = (y - 3)^2 - 4(y - 2)^2 \ge 0$

$\Leftrightarrow$ $(y - 3 + 2y - 4)(y - 3 - 2y + 4) \ge 0$

$\Leftrightarrow$ $(3y - 7)(1 - y) \ge 0$ $\Leftrightarrow$ $1 \le y \le \frac{7}{3}$.

b) Tương tự câu a), ta có : $x^2 + y^2 + xy - 3x - 4y + 4 = 0$

$\Leftrightarrow$ $y^2 + (x - 4)y + x^2 - 3x + 4 = 0$ (**)

(**) có nghiệm $\Leftrightarrow$ $\Delta = (x - 4)^2 - 4(x^2 - 3x + 4) \ge 0$

$\Leftrightarrow$ $x(4 - 3x) \ge 0$ $\Leftrightarrow$ $0 \le x \le \frac{4}{3}$.

Do $0 \le x \le \frac{4}{3}$ và $1 \le y \le \frac{7}{3}$ nên

$$x^4 + y^2 \le \left(\frac{4}{3}\right)^4 + \left(\frac{7}{3}\right)^2 = \frac{256}{81} + \frac{49}{9} = \frac{697}{81}.$$

$$x^4 + y^2 = \frac{697}{81} \Leftrightarrow x = \frac{4}{3} \text{ và } y = \frac{7}{3}.$$

Thử lại với $x = \frac{4}{3}$ và $y = \frac{7}{3}$ thì $x^2 + y^2 + xy - 3x - 4y + 4 = 1 \ne 0$.

Vậy hệ phương trình đã cho vô nghiệm.

Câu 3. Ta có : $3x^2 + 7y^2 = 2002$ $\Leftrightarrow$ $3x^2 = 2002 - 7y^2$ $\Leftrightarrow$ $3x^2 = 7(286 - y^2)$

Mặt khác (3, 7) = 1 nên $x \vdots 7 \Leftrightarrow x^2 \vdots 7^2$.

Từ đó suy ra $(286 - y^2) \vdots 7$ $\Leftrightarrow$ $[287 - (y^2 + 1)] \vdots 7$ $\Leftrightarrow$ $(y^2 + 1) \vdots 7$.

Giả sử y = 7k + r với $0 \le r \le 6$ thì :

$$y^2 + 1 = (7k + r)^2 + 1 = 7(7k^2 + 2kr) + r^2 + 1.$$

Thử lại ta thấy với r = 0; 1; 2; 3; 4; 5; 6 thì $r^2 + 1$ đều không chia hết cho 7 nên $y^2 + 1$ không chia hết cho 7.

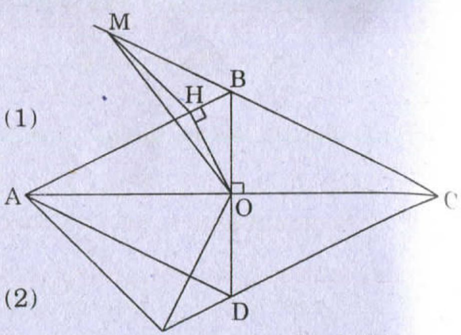
Vậy không tồn tại hai số nguyên x, y để $3x^2 + 7y^2 = 2002$.

Câu 4. Gọi $A_1, A_2, A_3, ..., A_{12}$ là các đỉnh của các đa giác lồi 12 cạnh. Do đa giác đã cho là đa giác lồi nên 3 đỉnh bất kì nào của nó cũng tạo thành một tam giác.

Kí hiệu $A_iA_jA_k$ là tam giác có các đỉnh là các đỉnh của đa giác lồi, trong đó i = 1, 2, ..., 12; j = 1, 2, ..., 12; k = 1, 2, ..., 12 với i, j, k đôi một khác nhau. Đỉnh A_i có 12 cách chọn từ 12 đỉnh $A_1, A_2, ..., A_{12}$. Sau khi chọn đỉnh A_i thì có 11 cách chọn A_j. Tương tự ta có 10 cách chọn A_k. Vậy có 12.11.10 = 1320 cách chọn tam giác $A_iA_jA_k$ được viết 6 lần.

Do đó số tam giác có được là 1320 : 6 = 220 (tam giác).

Câu 5. *(Hình 78)*



Hình 78

Ta có $\Delta MBH \backsim \Delta ADN$, suy ra :

$$\frac{MB}{AD} = \frac{BH}{DN} \Rightarrow MB.DN = BH.AD \qquad (1)$$

Mặt khác :

$\Delta OHB \backsim \Delta AOD$, suy ra

$$\frac{BH}{DO} = \frac{OB}{AD} \Rightarrow DO.ON = BH.AD \qquad (2)$$

Từ (1) và (2), ta có :

$$MB.DN = DO.OB \quad \Rightarrow \quad \frac{MB}{OB} = \frac{DO}{DN}.$$

Mà $\widehat{MBO} = 180^0 - \widehat{CBD} = 180^0 - \widehat{CDB} = \widehat{ODN}$

Nên $\Delta MBO \backsim \Delta ODN$, suy ra $\widehat{OMB} = \widehat{NOD}$.

Do đó : $\widehat{MON} = 180^0 - (\widehat{MOB} + \widehat{NOD}) = 180^0 - (\widehat{MOB} + \widehat{OMB})$

$$= 180^0 - \widehat{OBC} = 110^0$$

Vậy số đo của góc MON là 110^0.

ĐỀ 53

TRƯỜNG PTTH CHUYÊN LÊ KHIẾT, QUẢNG NGÃI

Đề thi tuyển sinh vào lớp 10 năm học 2005 – 2006

Câu 1.

1. Thực hiện phép tính : $(\sqrt{2} + \sqrt{3})\sqrt{2} - \sqrt{6} + \dfrac{\sqrt{999}}{\sqrt{111}}$.

2. Cho biểu thức : $A = \dfrac{1}{2 + \sqrt{x}} + \dfrac{1}{2 - \sqrt{x}} - \dfrac{2\sqrt{x}}{4 - x}$, với $x \geq 0$ và $x \neq 4$.

Rút gọn biểu thức A và tìm giá trị của x để $A = \dfrac{1}{4}$.

3. Giải phương trình và hệ phương trình :

a) $9x^2 - 9x + 2 = 0$

b) $\begin{cases} \dfrac{2}{x} + \dfrac{6}{y} = 11 \\ \dfrac{4}{x} - \dfrac{9}{y} = 1 \end{cases}$

Câu 2.

1. Tìm các giá trị của m để hàm số $y = (2m + 1)x + 3$ nghịch biến và đồ thị của nó đi qua điểm (1; 2).

2. Tìm m để hệ phương trình : $\begin{cases} 2x - y = m \\ 4x - m^2y = 2\sqrt{2} \end{cases}$ có nghiệm duy nhất.

3. Cho phương trình : $x^2 - (2m + 1)x + m^2 + m - 6 = 0$

a) Tìm các nghiệm của phương trình theo m.

b) Tìm các giá trị của m để phương trình có hai nghiệm đều âm.

Câu 3. Cho M là điểm bất kỳ trên nửa đường tròn tâm O đường kính AB = 2R (M không trùng với A, B). Vẽ các tiếp tuyến Ax, By, Mz của nửa đường tròn đó. Đường thẳng Mz cắt Ax, By lần lượt tại N và P. Đường thẳng AM cắt By tại C. Đường thẳng BM cắt Ax tại D. Chứng minh :

a) Tứ giác AOMN nội tiếp trong một đường tròn.

b) Tam giác NOP là tam giác vuông.

c) Các điểm N và P lần lượt là trung điểm của đoạn thẳng AD và BC.

Câu 4. Cho tam giác ABC vuông tại A có AD là đường phân giác của góc A. Cho biết AB = c, AC = b và AD = d. Chứng minh : $\dfrac{\sqrt{2}}{d} = \dfrac{1}{b} + \dfrac{1}{c}$.

BÀI GIẢI

Câu 1.

1. $(\sqrt{2} + \sqrt{3})\sqrt{2} - \sqrt{6} - \dfrac{\sqrt{999}}{\sqrt{111}} = 2 + \sqrt{6} - \sqrt{6} + \sqrt{9} = 5.$

2. Điều kiện : $x \geq 0$ và $x \neq 4$. Thì A trở thành :

$$A = \frac{2 - \sqrt{x}}{4 - x} + \frac{2 + \sqrt{x}}{4 - x} - \frac{2\sqrt{x}}{4 - x} = \frac{4 - 2\sqrt{x}}{4 - x}.$$

Khi $A = \dfrac{1}{4} \Leftrightarrow \dfrac{4 - 2\sqrt{x}}{4 - x} = \dfrac{1}{4} \Leftrightarrow x - 8\sqrt{x} + 16 = 4 \Leftrightarrow (\sqrt{x} - 4)^2 = 4$

Giải ra ta được x = 36.

3. a) $9x^2 - 9x + 2 = 0$

Ta có : $\Delta = 81 - 72 = 9 \Rightarrow \sqrt{\Delta} = 3 \Rightarrow x_1 = \dfrac{9 + 3}{18} = \dfrac{2}{3}$; $x_2 = \dfrac{9 - 3}{18} = \dfrac{1}{3}$.

b) Đặt : $u = \dfrac{1}{x}$, $v = \dfrac{1}{y}$ $(x, y \neq 0)$.

Hệ đã cho có dạng : $\begin{cases} 2u + 6v = 11 \\ 4u - 9v = 1 \end{cases}$

Giải hệ trên ta được $u = \dfrac{5}{2}$; $v = 1$.

Với $u = \dfrac{5}{2} \Rightarrow x = \dfrac{2}{5}$

Với $v = 1 \Rightarrow y = 1$

Vậy hệ có nghiệm (x; y) là $\left(\dfrac{2}{5}; 1\right)$.

Câu 2.

1. Hàm số $y = (2m + 1)x + 3$ nghịch biến với đồ thị của nó đi qua điểm (1; 2) khi : $\begin{cases} 2m + 1 < 0 \\ 2 = (2m + 1) + 3 \end{cases} \Leftrightarrow m = -1.$

2. $\begin{cases} 2x - y = m \\ 4x - m^2y = 2\sqrt{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{y + m}{2} \\ (2 - m^2)y = 2(\sqrt{2} - m) \end{cases}$

Hệ có nghiệm duy nhất khi và chỉ khi $2 - m^2 \neq 0$, hay $m \neq \sqrt{2}$ và $m \neq -\sqrt{2}$.

3. a) $x^2 - (2m + 1)x + m^2 + m - 6 = 0$. Ta có :

$\Delta = (2m + 1)^2 - 4(m^2 + m - 6) = 4m^2 + 4m + 1 - 4m^2 - 4m + 24 = 25$

$\Rightarrow \sqrt{\Delta} = 5.$

Phương trình có hai nghiệm :

$$x_1 = \frac{2m + 1 + 5}{2} = m + 3; \qquad x_2 = \frac{2m + 1 - 5}{2} = m - 2.$$

b) Phương trình đã cho có hai nghiệm đều âm khi và chỉ khi :

$$\begin{cases} m + 3 < 0 \\ m - 2 < 0 \end{cases} \Leftrightarrow m < -3.$$

Câu 3. *(Hình 79)*

1. Từ giả thiết ta có : $\widehat{OAN} = \widehat{OMN} = 90^0$ nên tứ giác AOMN nội tiếp được trong một đường tròn.

2. Ta có : $\widehat{MNO} = \widehat{MAO}$; $\widehat{MPO} = \widehat{MBO}$ mà $\widehat{MAO} + \widehat{MBO} = 90^0$ nên

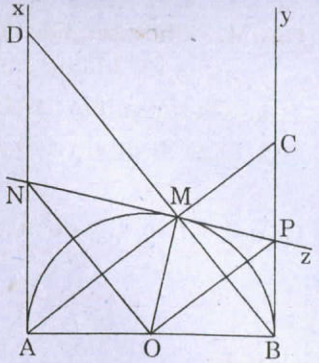
$\widehat{ONM} + \widehat{MPO} = 90^0$ hay tam giác NOP vuông tại O.

Cách khác : Vì ON và OP tương ứng là các tia phân giác của $\widehat{AOM}$ và $\widehat{BOM}$ nên ta có $\widehat{NOP} = 90^0$.

3. Nhận xét rằng ON ⊥ AM và BD ⊥ AM, suy ra ON // BD.

Do O là trung điểm AB nên N là trung điểm AD.

Tương tự như trên ta cũng có P là trung điểm của BC.



Hình 79

Câu 4. *(Hình 80)*

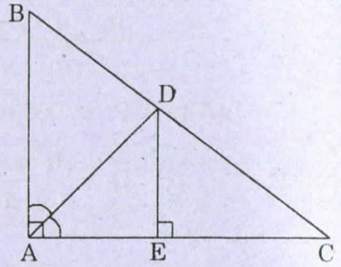
Kẻ DE ⊥ AC (với E ∈ AC). Tam giác AED vuông cân tại E nên :

$$AD = AE.\sqrt{2} \qquad (1)$$

Ta có $\dfrac{EC}{AC} = \dfrac{DE}{AB} \Rightarrow \dfrac{AC - AE}{AC} = \dfrac{AE}{AB}$

$$\Rightarrow AE\left(\frac{1}{AB} + \frac{1}{AC}\right) = 1 \qquad (2)$$

Từ (1) và (2), suy ra : $\dfrac{\sqrt{2}}{AD} = \dfrac{1}{AB} + \dfrac{1}{AC}$.



Hình 80

ĐỀ 54

TRƯỜNG PTTH CHUYÊN LÊ HỒNG PHONG, NAM ĐỊNH

Đề thi tuyển sinh vào lớp 10 (Ban A, B) năm học 2004 – 2005

Câu 1. Rút gọn biểu thức sau :

1. $P = \dfrac{m - n}{\sqrt{m} - \sqrt{n}} + \dfrac{m + n + 2\sqrt{mn}}{\sqrt{m} + \sqrt{n}}$ với $m \geq 0$, $n \geq 0$ và $m \neq n$.

2. $Q = \dfrac{ab^2 - ab^2}{ab} : \dfrac{\sqrt{a} - \sqrt{b}}{\sqrt{a} + \sqrt{b}}$ với $a > 0$, $b > 0$.

Câu 2. Giải phương trình : $\sqrt{6 - x} + \sqrt{x - 2} = 2$.

Câu 3. Cho các đường thẳng : $(d_1) : y = 2x + 2$; $(d_2) : y = -x + 2$;

$(d_3) : y = mx$ (m là tham số).

1. Tìm tọa độ các giao điểm A, B, C theo thứ tự của (d_1) với (d_2); (d_1) với trục hoành và (d_2) với trục hoành.

2. Tìm tất cả các giá trị m sao cho (d_3) cắt cả hai đường thẳng (d_1), (d_2).

3. Tìm tất cả các giá trị m sao cho (d_3) cắt cả hai tia AB và AC.

Câu 4. Cho tam giác đều ABC nội tiếp đường tròn (O) và D là điểm nằm trên cung BC không chứa điểm A. Trên tia AD lấy điểm E sao cho AE = DC.

1. Chứng minh : ΔABE = ΔCBD.
2. Xác định vị trí D sao cho tổng DA + DB + DC lớn nhất.

Câu 5. Tìm x, y dương thỏa mãn hệ : $\begin{cases} x + y = 1 \\ 8(x^4 + y^4) + \dfrac{1}{xy} = 5 \end{cases}$

BÀI GIẢI

Câu 1.

1. Ta có : $\dfrac{m - n}{\sqrt{m} - \sqrt{n}} = \sqrt{m} + \sqrt{n}$;

$$\frac{m + n + 2\sqrt{m.n}}{\sqrt{m} + \sqrt{n}} = \frac{(\sqrt{m} + \sqrt{n})^2}{\sqrt{m} + \sqrt{n}} = \sqrt{m} + \sqrt{n}.$$

Do đó : $P = 2(\sqrt{m} + \sqrt{n})$.

2. $$Q = \frac{a^2b - ab^2}{ab} : \frac{\sqrt{a} - \sqrt{b}}{\sqrt{a} + \sqrt{b}} = (a - b) : \frac{\sqrt{a} - \sqrt{b}}{\sqrt{a} + \sqrt{b}}$$

$$= (\sqrt{a} - \sqrt{b})(\sqrt{a} + \sqrt{b}) : \frac{\sqrt{a} - \sqrt{b}}{\sqrt{a} + \sqrt{b}} = \left(\sqrt{a} + \sqrt{b}\right)^2.$$

Câu 2. Điều kiện : $2 \le x \le 6$.

$$\sqrt{6 - x} + \sqrt{x - 2} = 2 \quad \Leftrightarrow \quad 6 - x + x - 2 + 2\sqrt{(6 - x)(x - 2)} = 4$$

$$\Leftrightarrow \quad \sqrt{(6 - x)(x - 2)} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \left[\begin{array}{l} x = 2 \\ x = 6 \end{array}\right.$$

So với điều kiện phương trình có hai nghiệm là x = 2; x = 6.

Câu 3.

1. Tọa độ điểm A thỏa mãn hệ : $\begin{cases} y = 2x + 2 \\ y = -x + 2 \end{cases}$. Giải ra ta được : A(0; 2).

Tọa độ điểm B thỏa mãn hệ : $\begin{cases} y = 2x + 2 \\ y = 0 \end{cases}$. Giải ra ta được : B(–1; 0).

Tọa độ điểm C thỏa mãn hệ : $\begin{cases} y = -x + 2 \\ y = 0 \end{cases}$. Giải ra ta được : C(2; 0).

2. (d_1) cắt (d_3) khi và chỉ khi các hệ số góc của chúng khác nhau, nghĩa là $m \neq 2$.

Tương tự (d_2) cắt (d_3) khi và chỉ khi $m \neq -1$.

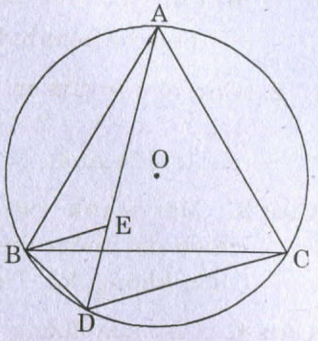
Vậy (d_3) cắt cả (d_1) và (d_2) khi và chỉ khi $m \neq 2$ và $m \neq -1$.

3. Tia AB nằm bên trái trục tung nên (d_3) cắt tia AB khi và chỉ khi hoành độ giao điểm (d_3) và (d_1) âm, hay $\dfrac{2}{m - 2} < 0 \Leftrightarrow m < 2$.

Tương tự (d_3) cắt tia AC khi và chỉ khi $\dfrac{2}{m + 1} > 0 \Leftrightarrow m > -1$.

Do đó (d_3) cắt cả hai tia AB và AC $\Leftrightarrow -1 < m < 2$.

Câu 4. *(Hình 81)*



Hình 81

1. Ta có AE = CD (theo giả thiết);

AB = CB;

$\widehat{BAE} = \widehat{BCD}$ (cùng chắn cung $\overset{\frown}{BD}$).

Suy ra ΔABE = ΔCBD (c.g.c).

2. Theo câu 1) ta có : BE = BD,

mà $\widehat{BDE} = \widehat{BDA} = 60^0$ nên ΔBDE đều,

suy ra BD = DE.

Từ đó ta có DA = DE + AE = DC + DB,

suy ra DA + DB + DC = 2DA ≤ 4R (R là bán kính đường tròn (O)).

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi D là điểm chính giữa cung $\overset{\frown}{BC}$.

Câu 5. Từ $(x^2 + y^2) \ge 2xy$ có $2(x^2 + y^2) \ge (x + y)^2 \Rightarrow x^2 + y^2 \ge \dfrac{1}{2}$.

Do đó $2(x^4 + y^4) \ge (x^2 + y^2)^2 \ge \dfrac{1}{4}$.

Hay $8(x^4 + y^4) \ge 1$. Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow x = y = \dfrac{1}{2}$.

Mặt khác $\dfrac{1}{xy} \ge \dfrac{4}{(x + y)^2} = 4$. Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow x = y = \dfrac{1}{2}$.

Suy ra $8(x^4 + y^4) + \dfrac{1}{xy} \ge 5$.

Vậy $\begin{cases} x + y = 1 \\ 8(x^4 + y^4) + 1 = 5 \end{cases} \Leftrightarrow x = y = \dfrac{1}{2}$.

ĐỀ 55

ĐỀ THI TUYỂN SINH VÀO LỚP 10, TỈNH THÁI BÌNH NĂM HỌC 2005 – 2006

Câu 1.

1. Thực hiện phép tính : $\sqrt{5} - \sqrt{9 - 4\sqrt{5}}$.
2. Giải phương trình : $x^4 - 5x^2 - 36 = 0$.

Câu 2. Cho hàm số : $y = (2m - 3)x + n - 4$ (d) $(m \neq \frac{3}{2})$.

1. Tìm giá trị của m và n để đường thẳng (d) :

a) Đi qua hai điểm A(1; 2), B(3; 4).

b) Cắt trục tung tại điểm có tung độ $y = 3\sqrt{2} - 1$ và cắt trục hoành tại điểm có hoành độ $x = 1 + \sqrt{2}$.

2. Cho n = 0, tìm m để đường thẳng (d) cắt đường thẳng (d') có phương trình : $x - y + 2 = 0$ tại điểm M(x; y) sao cho biểu thức $P = y^2 - 2x^2$ đạt giá trị lớn nhất.

Câu 3. Một mảnh vườn hình chữ nhật có diện tích là $720m^2$, nếu tăng chiều dài thêm 6m và giảm chiều rộng đi 4m thì diện tích của mảnh vườn không đổi. Tính các kích thước của mảnh vườn.

Câu 4. Cho nửa đường tròn (O) đường kính AB = 2R. Trên nửa mặt phẳng bờ AB chứa nửa đường tròn, kẻ hai tiếp tuyến Ax và By. Qua điểm M thuộc nửa đường tròn (M khác A và B) kẻ tiếp tuyến thứ ba cắt Ax, By theo thứ tự ở C, D.

1. Chứng minh : **a)** CD = AC + BD **b)** $AC.BD = R^2$.

2. Xác định vị trí điểm M để tứ giác ABCD có diện tích nhỏ nhất.

3. Cho biết R = 2cm, diện tích tứ giác ABCD bằng $32cm^2$. Tính diện tích tam giác ABM.

Câu 5. Cho các số dương x, y, z thỏa mãn : $x + y + z = 1$.

Chứng minh rằng :

$$\sqrt{2x^2 + xy + 2y^2} + \sqrt{2y^2 + yz + 2z^2} + \sqrt{2z^2 + zx + 2x^2} \geq \sqrt{5}.$$

BÀI GIẢI

Câu 1.

1. Ta có : $\sqrt{9 - 4\sqrt{5}} = \sqrt{(\sqrt{5} - 2)^2} = \sqrt{5} - 2$.

Suy ra $\sqrt{5} - \sqrt{9 - 4\sqrt{5}} = \sqrt{5} - \sqrt{5} + 2 = 2$.

2. Đặt $t = x^2$, $(t \geq 0)$. Phương trình đã cho có dạng :

$$t^2 + 5t - 36 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad t = 4 \text{ và } t = -9 \text{ (loại)}$$

Với $t = 4 \Rightarrow x = \pm 2$.

Vậy nghiệm của phương trình đã cho là : $x = 2$; $x = -2$.

Câu 2. (d) : $y = (2m - 3)x + n - 4$ $(m \neq \frac{3}{2})$.

1. a) (d) đi qua A(1; 2) và B(3; 4) khi và chỉ khi :

$$\begin{cases} 2m - 3 + n - 4 = 2 \\ 3(2m - 3) + n - 4 = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2m + n = 9 \\ 6m + n = 17 \end{cases}$$

Giải ra ta được : m = 2 và n = 5.

b) Ta có (d) đi qua $(0; 3\sqrt{2} - 1) \Leftrightarrow n - 4 = 3\sqrt{2} - 1 \Leftrightarrow n = 3 + 3\sqrt{2}$.

(d) đi qua $(1 + \sqrt{2}; 0)$ $\Leftrightarrow (2m - 3)(1 + \sqrt{2}) + n - 4 = 0$

$$\Leftrightarrow 2(1 + \sqrt{2})m - 3 - 3\sqrt{2} + 3 + 3\sqrt{2} - 4 = 0$$

$$\Leftrightarrow m = \frac{2}{1 + \sqrt{2}} = 2(\sqrt{2} - 1) = 2\sqrt{2} - 2$$

Vậy $m = 2\sqrt{2} - 2$; $n = 3 + 3\sqrt{2}$.

2. Với n = 0, ta có (d) : $y = (2m - 3)x - 4$.

Tọa độ của M thỏa mãn hệ :

$$\begin{cases} y = (2m - 3)x - 4 \\ x - y + 2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow (x; y) = \left(\frac{3}{m - 2}; \frac{2m - 1}{m - 2}\right) \quad (m \neq -2)$$

$$P = y^2 - 2x^2 = \left(\frac{2m - 1}{m - 2}\right)^2 - 2\left(\frac{3}{m - 2}\right)^2 = \frac{4m^2 - 4m - 17}{m^2 - 4m + 4}$$

$\Leftrightarrow$ $(m^2 - 4m + 4)P = 4m^2 - 4m - 17$ $(m \neq 2)$

$\Leftrightarrow$ $(P - 4)m^2 - 4(P - 1)m + 4P + 17 = 0$ (1)

Với $P = 4 \Rightarrow m = \frac{11}{4}$.

Với $P \neq 4$, (1) có nghiệm $\Leftrightarrow \Delta' = 72 - 9P \geq 0 \Leftrightarrow P \leq 8$.

Vậy P đạt giá trị lớn nhất là 8, khi $m = \frac{7}{2}$.

Câu 3. Gọi chiều dài mảnh vườn là : x (m).

Chiều rộng của mảnh vườn là : $\frac{720}{x}$ (m).

Theo giả thiết ta có phương trình :

$$(x + 6)\left(\frac{720}{x} - 4\right) = 720 \Leftrightarrow x^2 + 6x - 1080 = 0$$

$$\Leftrightarrow x = 30 \text{ hoặc } x = -33.$$

Do x > 0 chọn x = 30 (m).

Vậy kích thước mảnh vườn là : 30m × 24m.

Câu 4. *(Hình 82)*

1. a) Ta có : CD = CM + DM; CM = CA; DM = DB.

Suy ra CD = AC + BD.

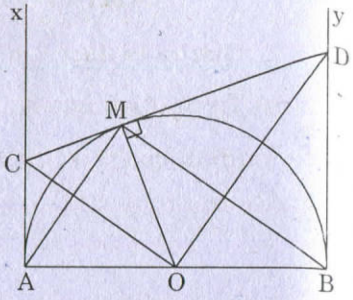
b) Ta có : $\widehat{COD} = \widehat{AMB} = 90^0$

(góc có cạnh tương ứng vuông góc);

OM ⊥ CD (theo giả thiết).

Suy ra : $AC.BD = CM.DM$

$= OM^2 = R^2$.



Hình 82

2. Ta thấy ABCD là hình thang vuông nên :

$$2S_{ABCD} = AB(AC + BD)$$
$$= 2R.CD.$$

Suy ra $S_{ABCD} = R.CD \geq R.AB = 2R^2$.

Vậy ABCD có diện tích nhỏ nhất là $2R^2$, đạt được khi và chỉ khi AB = CD ⇔ M là điểm giữa cung AB của nửa đường tròn (O) đường kính AB.

3. Theo kết quả trên ta có $CD = \dfrac{32}{2} = 16$ (cm).

Suy ra $2S_{COD} = OM.CD = 2.16 = 32\ (cm^2) \Rightarrow S_{COD} = 16\ (cm^2)$.

Dễ thấy ΔABM đồng dạng với ΔCDO, suy ra

$$\frac{S_{ABM}}{S_{CDO}} = \frac{AB^2}{CD^2} \Rightarrow S_{ABM} = 16.\frac{AB^2}{CD^2} = 16.\frac{4^2}{16^2} = 1\ (cm^2).$$

Câu 5. Nhận xét rằng :

$$4(2x^2 + xy + 2y^2) = 5(x + y)^2 + 3(x - y)^2 \geq 5(x + y)^2$$

Vì x, y > 0, suy ra $\sqrt{2x^2 + xy + 2y^2} \geq \dfrac{\sqrt{5}}{2}(x + y)$.

Tương tự, ta có : $\sqrt{2y^2 + yz + 2z^2} \geq \dfrac{\sqrt{5}}{2}(y + z)$;

$$\sqrt{2z^2 + zx + 2x^2} \geq \frac{\sqrt{5}}{2}(z + x).$$

Cộng 3 bất đẳng thức trên ta được :

$$\sqrt{2x^2 + xy + 2y^2} + \sqrt{2y^2 + yz + 2z^2} + \sqrt{2z^2 + zx + 2x^2} \geq \sqrt{5}(x + y + z).$$

Do x + y + z = 1. Suy ra :

$$\sqrt{2x^2 + xy + 2y^2} + \sqrt{2y^2 + yz + 2z^2} + \sqrt{2z^2 + zx + 2x^2} \geq \sqrt{5}.$$

ĐỀ 56

TRƯỜNG PTTH CHUYÊN NGUYỄN BỈNH KHIÊM, VĨNH LONG

Đề thi tuyển sinh vào lớp 10 năm học 2005 – 2006

Câu 1. Cho hàm số $f(x) = \sqrt{x^2 - 4x + 4}$.

a) Tính f(–1), f(–5). **b)** Tìm x để f(x) = 10

c) Rút gọn $A = \dfrac{f(x)}{x^2 - 4}$ khi $x \neq \pm 2$.

Câu 2. Tìm nghiệm nguyên dương x, y, z, t của phương trình :

$$\frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} + \frac{1}{z^2} + \frac{1}{t^2} = 1.$$

Câu 3. Cho hai số dương a, b. Chứng minh rằng :

$$\frac{(a + b)^2}{2} + \frac{a + b}{4} \geq a\sqrt{b} + b\sqrt{a}.$$ Khi nào xảy ra đẳng thức ?

Câu 4. Cho phương trình bậc hai (ẩn x) sau : $x^2 - mx + m - 1 = 0$.

a) Xác định m để phương trình trên luôn có hai nghiệm x_1, x_2.

b) Tính $A = \dfrac{2x_1x_2 + 3}{x_1^2 + x_2^2 + 2(1 + x_1x_2)}$ theo m.

Câu 5. Từ điểm P nằm ngoài đường tròn tâm O bán kính R, kẻ hai tiếp tuyến PA và PB. Gọi H là chân đường vuông góc hạ từ A đến đường kính BC.

a) Chứng minh rằng PC cắt AH tại trung điểm E của AH.

b) Giả sử PO = d. Tính AH theo R và d.

Câu 6. Cho tam giác ABC vuông ở A, $BC = \sqrt{2}$, đường cao $AH = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

Chứng minh rằng ABC là tam giác vuông cân.

BÀI GIẢI

Câu 1.

a) Ta có : $f(x) = \sqrt{x^2 - 4x + 4} = \sqrt{(x - 2)^2} = |x - 2|$.

Suy ra f(–1) = f(5) = 3.

b) $f(x) = 10 \Leftrightarrow |x - 2| = 10 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x - 2 = 10 \\ x - 2 = -10 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 12 \\ x = -8 \end{array}\right.$

c) $A = \dfrac{f(x)}{x^2 - 4} = \dfrac{|x - 2|}{(x - 2)(x + 2)}$

Với $x > 2 \Rightarrow x - 2 > 0 \Rightarrow A = \dfrac{1}{x + 2}$.

Với $x < 2 \Rightarrow x - 2 < 0 \Rightarrow A = -\dfrac{1}{x + 2}$.

Câu 2. Các số nguyên dương x, y, z, t đều lớn hơn 1 vì nếu một trong các số đó không lớn hơn 1 thì : $\dfrac{1}{x^2} + \dfrac{1}{y^2} + \dfrac{1}{z^2} + \dfrac{1}{t^2} > 1$.

Mặt khác các số x, y, z, t đều nhỏ hơn 3 vì nếu một trong các số đó không nhỏ hơn 3 thì : $\dfrac{1}{x^2} + \dfrac{1}{y^2} + \dfrac{1}{z^2} + \dfrac{1}{t^2} \le \dfrac{1}{9} + \dfrac{1}{4} + \dfrac{1}{4} + \dfrac{1}{4} < 1$

Vậy $x = y = z = t = 2$.

Câu 3. Áp dụng bất đẳng thức Côsi cho hai số dương ta có :

$$\frac{(a + b)^2}{2} + \frac{a + b}{4} = \frac{a + b}{2}\left(a + b + \frac{1}{2}\right) = \frac{a + b}{2}\left(a + \frac{1}{4} + b + \frac{1}{4}\right) \ge \sqrt{ab}\left(a + b + \frac{1}{2}\right).$$

Xét hiệu : $\sqrt{ab}\left(a + b + \dfrac{1}{2}\right) - (a\sqrt{b} + b\sqrt{a}) = \sqrt{ab}\left(a + b + \dfrac{1}{2} - \sqrt{a} - \sqrt{b}\right)$

$$= \sqrt{ab}\left[\left(\sqrt{a} - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(\sqrt{b} - \frac{1}{2}\right)^2\right] \ge 0.$$

Suy ra : $\sqrt{ab}\left(a + b + \dfrac{1}{2}\right) \ge a\sqrt{b} + b\sqrt{a} \Rightarrow \dfrac{(a + b)^2}{2} + \dfrac{a + b}{4} \ge a\sqrt{b} + b\sqrt{a}$.

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a = b = 0 \\ a = b = \dfrac{1}{4} \end{array}\right.$

Câu 4. $x^2 - mx + m - 1 = 0$ (*)

a) Ta có : $\Delta = m^2 - 4(m - 1) = (m - 2)^2 \ge 0$.

(*) có hai nghiệm phân biệt $x_1, x_2 \Leftrightarrow m \ne 2$.

b) Theo định lí Viét ta có : $\begin{cases} x_1 + x_2 = m \\ x_1x_2 = m - 1 \end{cases}$

Suy ra $A = \dfrac{2x_1x_2 + 3}{x_1^2 + x_2^2 + 2(1 + x_1x_2)} = \dfrac{2x_1x_2 + 3}{(x_1 + x_2)^2 + 2}$

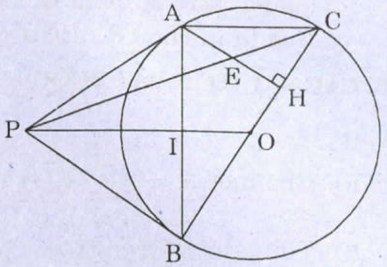
$$= \frac{2(m - 1) + 3}{m^2 + 2} = \frac{2m + 1}{m^2 + 2} = 1 - \frac{(m - 1)^2}{m^2 + 2} \le 1.$$

Vậy A đạt giá trị lớn nhất là 1 khi m = 1.

Câu 5. *(Hình 83)*

a) Do AH // PB (cùng vuông góc với BC). Theo định lí Ta-let, ta có :

$$\frac{EH}{PB} = \frac{CH}{CB} \quad (1)$$



Hình 83

Mặt khác PO // AC (cùng vuông góc với AB), nên $\widehat{POB} = \widehat{ACB}$, suy ra hai tam giác vuông ACH và POB đồng dạng, ta có :

$$\frac{AH}{PB} = \frac{CH}{OB} \quad (2)$$

Từ (1) và (2), kết hợp với CB = 2OB, suy ra AH = 2EH

$\Rightarrow$ EA = EH hay E là trung điểm của AH.

b) Xét tam giác vuông BAC, ta có : $AH^2 = BH.CH = (2R - CH).CH$

Từ (1), chú ý AH = 2EH, ta có : $AH^2 = \left(2R - \dfrac{AH.CB}{2PB}\right).\dfrac{AH.CB}{2PB}$

$\Leftrightarrow \quad 4PB^2.AH^2 = (4R.PB - AH.2R).AH.2R$

$\Leftrightarrow \quad PB^2.AH = R^2(2PB - AH) \quad \Leftrightarrow \quad AH(PB^2 + R^2) = 2R^2.PB$

$\Leftrightarrow \quad AH = \dfrac{2R^2.PB}{PB^2 + R^2} = \dfrac{2R^2}{d^2}\sqrt{d^2 - R^2} \quad$ (do $PB^2 = d^2 - R^2$)

Câu 6. Gọi x, y lần lượt là độ dài hai cạnh góc vuông của tam giác ABC, ta có $x^2 + y^2 = BC^2 = 2$; $\quad 2S_{ABC} = xy = \sqrt{2}.\dfrac{\sqrt{2}}{2} = 1$

Giải hệ phương trình : $\begin{cases} xy = 1 \\ x^2 + y^2 = 2 \end{cases}$, ta được $x = y = 1$.

Vậy ABC là tam giác vuông cân.

ĐỀ 57

TRƯỜNG PTTH CHUYÊN LÊ QUÝ ĐÔN, ĐÀ NẴNG

Đề thi tuyển sinh vào lớp 10 năm học 2005 – 2006

A. LÍ THUYẾT. Thí sinh chọn một trong hai đề sau :

Đề 1. Phát biểu định nghĩa hai hệ phương trình tương đương.

Áp dụng : Giải thích tại sao hai hệ phương trình sau là tương đương :

$$\begin{cases} x + y = 1 \\ x - y = 3 \end{cases} \quad \text{và} \quad \begin{cases} x + y = 1 \\ y - x = -3 \end{cases}$$

Đề 2. Viết công thức tính thể tích một hình chóp.

Áp dụng : Cho hình chóp tứ giác đều S.ABCD, đáy ABCD là hình vuông, tâm là điểm O, cạnh AB = 8cm, đường cao SO = 13cm. Tính thể tích hình chóp S.ABCD.

B. CÁC BÀI TOÁN BẮT BUỘC

Câu 1.

a) Cho biết $A = 9 + 3\sqrt{7}$ và $B = 9 - 3\sqrt{7}$. Hãy so sánh A + B và A.B.

b) Tính giá trị biểu thức : $M = \left(\dfrac{1}{3-\sqrt{5}} - \dfrac{1}{3+\sqrt{5}}\right) : \dfrac{5-\sqrt{5}}{\sqrt{5}-1}$.

Câu 2.

a) Giải phương trình : $x^4 - 24x^2 - 25 = 0$.

b) Giải hệ phương trình : $\begin{cases} 2x - y = 2 \\ 9x + 8y = 34 \end{cases}$

Câu 3. Cho phương trình : $x^2 - 2mx + (m-1)^3 = 0$ (1)

(x là ẩn số, m là tham số).

a) Giải phương trình (1) khi m = –1.

b) Định m để phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt, trong đó một nghiệm bằng bình phương nghiệm còn lại.

Câu 4. Cho tam giác ABC có các góc đều nhọn, $\widehat{A} = 45^0$. Vẽ các đường cao BD và CE của tam giác ABC. Gọi H là giao điểm của BD và CE.

a) Chứng minh tứ giác ADHE nội tiếp trong một đường tròn.

b) Chứng minh HD = DC.

c) Tính tỉ số $\dfrac{DE}{BC}$.

d) Gọi O là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC. Chứng minh OA vuông góc DE.

BÀI GIẢI

A. LÍ THUYẾT. Bạn đọc tự làm.

B. BÀI TOÁN BẮT BUỘC

Câu 1.

a) Ta có : $A + B = 9 + 3\sqrt{7} + 9 - 3\sqrt{7} = 18$.

$A.B = (9 + 3\sqrt{7})(9 - 3\sqrt{7}) = 9^2 - (3\sqrt{7})^2 = 81 - 9.7 = 18$.

Vậy $A + B = A.B = 18$.

b) $$M = \left(\frac{1}{3-\sqrt{5}} - \frac{1}{3+\sqrt{5}}\right) : \left(\frac{5-\sqrt{5}}{\sqrt{5}-1}\right) = \left[\frac{3+\sqrt{5}-3+\sqrt{5}}{(3-\sqrt{5})(3+\sqrt{5})}\right] \times \frac{\sqrt{5}-1}{\sqrt{5}(\sqrt{5}-1)}$$

$$= \frac{2\sqrt{5}}{9-5} \times \frac{1}{\sqrt{5}} = \frac{1}{2}$$

Vậy $M = \dfrac{1}{2}$.

Câu 2.

a) $x^4 - 24x^2 - 25 = 0$ (*). Đặt $t = x^2$, $t \geq 0$.

(*) trở thành : $t^2 - 24t - 25 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = 25 \\ t = -1 \text{ (loại)} \end{array}\right.$

Với t = 25 thì x = ± 5.

Vậy phương trình đã cho có hai nghiệm : x = 5; x = –5.

b) $\begin{cases} 2x - y = 2 \\ 9x + 8y = 34 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 2x - 2 \\ 9x + 8y = 34 \end{cases}$

Thay y = 2x – 2 vào phương trình 9x + 8y = 34 ta được :

$9x + 8(2x - 2) = 0 \Leftrightarrow 25x = 50 \Leftrightarrow x = 2$.

Với x = 2 thì y = 2.2 – 2 = 2.

Vậy hệ phương trình đã cho có nghiệm (x; y) là (2; 2).

Câu 3. $x^2 - 2mx + (m-1)^3 = 0$ (1)

a) Khi m = –1, (1) có dạng : $x^2 + 2x - 8 = 0 \Leftrightarrow x = -4$ và $x = 2$.

b) (1) có hai nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow \Delta' = m^2 - (m-1)^3 > 0$ (*)

Theo giả thiết ta có hai nghiệm của (1) là x và x^2.

Theo định lí Viet ta có : $\begin{cases} x + x^2 = 2m & (1) \\ x.x^2 = (m-1)^3 & (2) \end{cases}$

Từ (2) có : x = m – 1, thay vào (1) ta được :

$(m-1) + (m-1)^2 = 2m \Leftrightarrow m^2 - 3m = 0 \Leftrightarrow m_1 = 0$ hoặc $m_2 = 3$.

So với điều kiện (*) ta chọn m = 0 hoặc m = 3.

Câu 4. *(Hình 84)*

a) Ta có $\widehat{ADH} = \widehat{AEH} = 90^0$ (giả thiết), suy ra $\widehat{AEH} + \widehat{ADH} = 180^0$ nên tứ giác AEHD nội tiếp trong một đường tròn.

b) Tam giác vuông AEC có $\widehat{EAC} = 45^0$ nên $\widehat{ECA} = 45^0$, suy ra tam giác HDC vuông cân tại D. Vậy DH = DC.

c) Do D, E nằm trên đường tròn đường kính BC nên $\widehat{AED} = \widehat{ACB}$, suy ra ΔAED đồng dạng với ΔACB, do đó ta có :

$$\frac{DE}{BC} = \frac{AE}{AC} = \frac{AE}{AE.\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

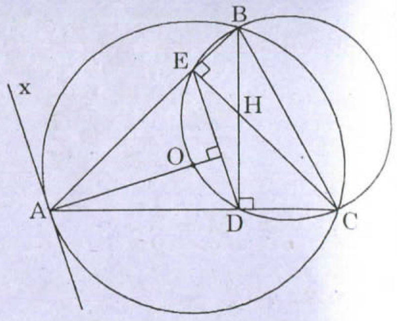
d) Kẻ tiếp tuyến Ax với đường tròn (O).

Ta có $\widehat{BAx} = \widehat{BCA}$,

mà $\widehat{BCA} = \widehat{AED}$ (cùng bù với $\widehat{DEB}$),

suy ra $\widehat{BAx} = \widehat{AED}$.

Do đó DE // Ax, nhưng OA ⊥ Ax, vậy OA ⊥ DE (đpcm).



Hình 84

ĐỀ 58

TRƯỜNG PTTH CHUYÊN LÊ QUÝ ĐÔN, ĐÀ NẴNG

Đề thi tuyển sinh vào lớp 10 chuyên Toán năm học 2003 – 2004

Câu 1.

a) Thu gọn biểu thức : $P = \dfrac{\sqrt{2} + \sqrt{3} + \sqrt{6} + \sqrt{8} + 4}{\sqrt{2} + \sqrt{3} + \sqrt{4}}$.

b) Tính giá trị biểu thức $Q = \dfrac{x - y}{x + y}$; biết $x^2 - 2y^2 = xy$ và $y \neq 0$, $x + y \neq 0$.

Câu 2. Giải các phương trình sau :

a) $2\sqrt[3]{x^2} - 5\sqrt[3]{x} = 3$ **b)** $x^3 - x^2 - x = \dfrac{1}{3}$.

Câu 3.

a) Tìm hai số tự nhiên a và b thỏa mãn $a - b = \dfrac{a}{b}$.

b) Cho hai số dương a, b và $a + b = 5$.

Tìm giá trị nhỏ nhất của tổng $P = \dfrac{1}{a} + \dfrac{1}{b}$.

Câu 4. Cho hệ phương trình : $\begin{cases} x - 3y - 3 = 0 \\ x^2 + y^2 - 2x - 2y - 9 = 0 \end{cases}$

Gọi $(x_1; y_1)$ và $(x_2; y_2)$ là hai nghiệm của hệ phương trình trên. Hãy tính giá trị của biểu thức $M = (x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2$.

Câu 5. Cho đường tròn tâm O và một dây AB của đường tròn đó các tiếp tuyến vẽ từ A và B của đường tròn cắt nhau tại C. Kẻ dây CD của đường tròn có đường kính OC (D khác A và B). CD cắt cung $\overset{\frown}{AB}$ của đường tròn (O) tại E (E nằm giữa C và D). Chứng minh :

a) $\widehat{BED} = \widehat{DAE}$ **b)** $DE^2 = DA.DB$.

BÀI GIẢI

Câu 1.

a) Ta có : $P = \dfrac{(\sqrt{2} + \sqrt{3} + 2) + \sqrt{2}(\sqrt{3} + 2 + \sqrt{2})}{(\sqrt{2} + \sqrt{3} + 2)} = 1 + \sqrt{2}$.

b) Từ giả thiết $x^2 - 2y^2 = xy$, suy ra $(x + y)(x - 2y) = 0$

Do $x + y \neq 0$ nên $x = 2y$.

Vậy $Q = \dfrac{x - y}{x + y} = \dfrac{2y - y}{2y + y} = \dfrac{y}{3y} = \dfrac{1}{3}$.

Câu 2.

a) $2\sqrt[3]{x^2} - 5\sqrt[3]{x} = 3$. Đặt $t = \sqrt[3]{x}$.

Phương trình trở thành : $2t^2 - 5t - 3 = 0 \Leftrightarrow t_1 = -\dfrac{1}{2}$ và $t_2 = 3$.

Với $t = -\dfrac{1}{2}$ thì $\sqrt[3]{x} = -\dfrac{1}{2} \Rightarrow x = -\dfrac{1}{8}$.

Với $t = 3$ thì $\sqrt[3]{x} = 3 \Rightarrow x = 27$.

b) $x^3 - x^2 - x = \dfrac{1}{3} \Leftrightarrow 3x^3 - 3x^2 - 3x - 1 = 0$

$\Leftrightarrow 4x^3 = x^3 + 3x^2 + 3x + 1 \Leftrightarrow 4x^3 = (x + 1)^3$

$\Leftrightarrow \sqrt[3]{4}.x = x + 1 \Leftrightarrow (\sqrt[3]{4} - 1)x = 1 \Leftrightarrow x = \dfrac{1}{\sqrt[3]{4} - 1}$.

Câu 3.

a) Đặt $a - b = n$ (1) ($a, b, n \in N$ và $b \neq 0$),

theo giả thiết ta có : $\dfrac{a}{b} = n$ (2)

Từ (1) và (2), ta có : $bn - b = n \Leftrightarrow (n - 1)b = n$ (3)

Nếu $n = 1$ thì không thỏa mãn (3).

Nếu $n \neq 1$ thì $b = \dfrac{n}{n - 1} = 1 + \dfrac{1}{n - 1}$ (4)

Do b là số tự nhiên nên (n − 1) là ước số của 1, hay n − 1 = 1 hoặc n − 1 = −1.

Với n = −1 thì n = 0, không thỏa mãn (3).

Với n − 1 = 1 thì n = 2, từ (4) suy ra b = 2, a = 4.

Thử lại ta thấy (a, b) = (4, 2) thỏa mãn đầu bài.

b) Ta có : $P = \frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{a+b}{ab} = \frac{5}{ab} \geq \frac{20}{(a+b)^2} = \frac{4}{5}$.

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow$ $a = b = \frac{5}{2}$.

Vậy giá trị nhỏ nhất của P là $\frac{4}{5}$, đạt được khi $a = b = \frac{5}{2}$.

Câu 4. $\begin{cases} x - 3y - 3 = 0 & (1) \\ x^2 + y^2 - 2x - 2y - 9 = 0 & (2) \end{cases}$

Từ (1), suy ra x = 3(y + 1), thay vào (2) ta được : $5y^2 + 5y - 3 = 0$ (3)

Do $(x_1; y_1)$ và $(x_2; y_2)$ là hai nghiệm của hệ phương trình, nên y_1, y_2 là nghiệm của hệ (3).

Ta có : $\begin{cases} y_1 + y_2 = -1 \\ y_1.y_2 = -\frac{3}{5} \end{cases}$ (4)

Từ x = 3(y + 1), suy ra $x_1 - x_2 = 3(y_1 - y_2)$, nên ta có :

$$M = (x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 = 10(y_1 - y_2)^2.$$

Từ (4) có : $M = 10[(y_1 + y_2)^2 - 4y_1y_2] = 34$.

Câu 5. *(Hình 85)*

a) Ta có : $\widehat{EBC} = \widehat{EAB}$ (cùng chắn cung $\overset{\frown}{EB}$),

$\widehat{DCB} = \widehat{DAB}$ (cùng chắn cung $\overset{\frown}{BD}$).

Nên $\widehat{EBC} + \widehat{DCB} = \widehat{EAB} + \widehat{DAB}$

Mặt khác : $\widehat{EBC} + \widehat{DCB} = \widehat{BED}$,

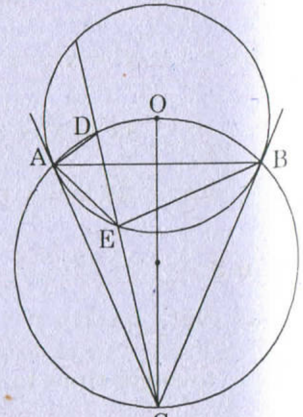
$\widehat{EAB} + \widehat{DAB} = \widehat{DAE}$

Vậy $\widehat{BED} = \widehat{DAE}$ (đpcm).

b) Ta có : $\widehat{ADE} = \widehat{ABC} = \widehat{CAB} = \widehat{EDB}$.

Theo kết quả câu a) $\widehat{BED} = \widehat{DAE}$,

suy ra $\Delta BED \backsim \Delta EAD$. Nên : $\frac{DE}{DA} = \frac{DB}{DE}$ hay $DE^2 = DA.DB$ (đpcm).



Hình 85

ĐỀ 59

TRƯỜNG PTTH CHUYÊN LÊ QUÝ ĐÔN, QUY NHƠN

Đề thi tuyển sinh vào lớp 10 năm học 2005 – 2006

Câu 1. Tính giá trị biểu thức :

$$A = \frac{1}{a+1} + \frac{1}{b+1}, \quad \text{với} \quad a = \frac{1}{2+\sqrt{3}} \quad \text{và} \quad b = \frac{1}{2-\sqrt{3}}.$$

Câu 2. Giải phương trình : $\sqrt{x^2 - 4x + 4} + x = 8$.

Câu 3. Cho hàm số $y = x^2$ có đồ thị (P) và hai điểm A, B thuộc (P) có hoành độ lần lượt là −1 và 2.

a) Viết phương trình đường thẳng AB.

b) Vẽ đồ thị (P) và tìm tọa độ điểm M thuộc cung AB của đồ thị (P) sao cho tam giác MAB có diện tích lớn nhất.

Câu 4. Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn tâm O có trực tâm H. Phân giác trong góc A cắt đường tròn (O) tại M. Kẻ đường cao AK của tam giác. Chứng minh rằng :

a) Đường thẳng OM đi qua trung điểm N của BC.

b) Các góc $\widehat{KAM}$ và $\widehat{MAO}$ bằng nhau.

c) AH = 2NO.

Câu 5. Tính tổng S = 1.2 + 2.3 + 3.4 + ... + n(n + 1).

BÀI GIẢI

Câu 1. Ta có : $a = \frac{1}{2+\sqrt{3}} = 2 - \sqrt{3}$; $\quad b = \frac{1}{2-\sqrt{3}} = 2 + \sqrt{3}$.

Do đó $A = \frac{1}{1+a} + \frac{1}{1+b} = \frac{1}{3-\sqrt{3}} + \frac{1}{3+\sqrt{3}} = \frac{3+\sqrt{3}+3-\sqrt{3}}{9-3} = 1$.

Câu 2. $\sqrt{x^2 - 4x + 4} + x = 8 \quad \Leftrightarrow \quad |x - 2| + x = 8 \qquad (*)$

Nếu $x \leq 2$ thì (*) trở thành $2 - x + x = 8 \Leftrightarrow 2 = 8$ (vô nghiệm).

Nếu $x > 2$ thì (*) trở thành $x - 2 + x = 8 \Leftrightarrow x = 5$ (thỏa mãn điều kiện).

Vậy phương trình có nghiệm duy nhất là x = 5.

Câu 3. *(Hình 86)*

a) Do A; B thuộc đồ thị hàm số $y = x^2$ nên A(−1; 1); B(2; 4).

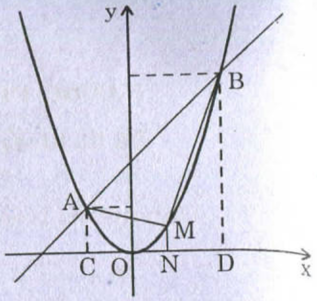
Phương trình đường thẳng AB có dạng : y = ax + b (*)

Thay tọa độ của A và B vào (*) ta có hệ sau :

$$\begin{cases}1 = -a + b\\ 4 = 2a + b\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}a = 1\\ b = 2\end{cases}$$

Vậy phương trình đường thẳng AB là :

$$y = x + 2.$$



Hình 86

b) Gọi m là hoành độ của điểm M.

Ta có $M(m; m^2)$ $(m \in [-1; 2])$.

Gọi C, D, N lần lượt là hình chiếu của A, B, M trên trục Ox ta có : $NC = m + 1$; $ND = 2 - m$; $CD = 3$.

Ta có : $S_{AMB} = S_{ABCD} - (S_{AMNC} + S_{BDMN}) =$

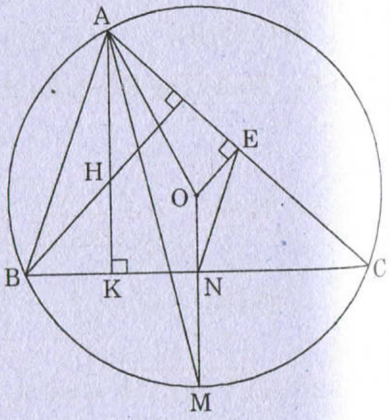
$$= 3.\frac{1+4}{2} - \left[\frac{(m^2+1)(m+1)}{2} + \frac{(4+m^2)(2-m)}{2}\right] = \frac{-3m^2 + 3m + 6}{2}$$

$$= \frac{-3}{2}\left(m - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{27}{8} \le \frac{27}{8}.$$

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow$ $m = \frac{1}{2}$ hay $M\left(\frac{1}{2}; \frac{1}{4}\right)$.

Vậy diện tích tam giác MAB lớn nhất là $\frac{27}{8}$ khi $M\left(\frac{1}{2}; \frac{1}{4}\right)$.

Câu 4. *(Hình 87)*



Hình 87

a) Ta có $\widehat{BAM} = \widehat{CAM}$ (giả thiết), suy ra $\overset{\frown}{BM} = \overset{\frown}{CM}$ do đó OM vuông góc với BC tại N là trung điểm của BC.

b) Ta có AK // OM (cùng vuông góc với BC), suy ra $\widehat{KAM} = \widehat{AMO}$ (so le trong).

Mặt khác $\widehat{AMO} = \widehat{NAO}$.

Suy ra $\widehat{KAM} = \widehat{MAO}$

c) Gọi E là trung điểm của BC. Ta có EN là đường trung bình của tam giác ABC, suy ra EN // AB; $EN = \frac{AB}{2}$.

Mặt khác AH // ON (cùng vuông góc BC); BH // OE (cùng vuông góc với AC). Do đó ΔAHB đồng dạng với ΔNOE (g.g).

Suy ra $\frac{NO}{AH} = \frac{NE}{AB} = \frac{1}{2}$. Vậy AH = 2NO.

Câu 5. Vì $k(k + 1) = k + k^2$, ta có : $S = 1.2 + 2.3 + 3.4 + ... + n(n + 1)$

$$= (1 + 2 + 3 ... + n) + (1^2 + 2^2 + 3^2 + ... + n^2) \quad (1)$$

Ta chứng minh được : $1^2 + 2^2 + 3^2 + ... + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ (2)

Bằng phương pháp quy nạp theo n, với $n \in N^*$ và

$$1 + 2 + 3 + ... + n = \frac{n(n+1)}{2} \quad (3)$$

Từ (1), (2) và (3), suy ra :

$$S = \frac{n(n+1)}{2} + \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} = \frac{n(n+1)(n+2)}{3}.$$

ĐỀ 60

TRƯỜNG PTTH CHUYÊN LÊ QUÝ ĐÔN, QUY NHƠN

Đề thi tuyển sinh vào lớp 10 năm học 2004 – 2005

A. LÍ THUYẾT. Thí sinh chọn một trong hai đề sau để làm bài :

Đề 1. Phát biểu định nghĩa và nêu các tính chất của hàm số bậc nhất.

Áp dụng. Cho hàm số bậc nhất $y = 3x - 5$. Hãy tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của y khi $1 \le x \le 2$.

Đề 2. Viết công thức tính độ dài của một đường tròn, độ dài của một cung tròn.

Áp dụng. Cho ba điểm A, B, C thẳng hàng (B nằm giữa A và C). Chứng minh rằng độ dài của nửa đường tròn đường kính AC bằng tổng các độ dài của hai nửa đường tròn có đường kính AB và BC.

B. CÁC BÀI TOÁN BẮT BUỘC

Câu 1. Chứng minh rằng :

$$\left(\frac{\sqrt{a}+2}{a+2\sqrt{a}+1} - \frac{\sqrt{a}-2}{a-1}\right)\frac{\sqrt{a}+1}{\sqrt{a}} = \frac{2}{a-1} \text{ với } a > 0;\ a \ne 1.$$

Câu 2. Cho parabol (P) có phương trình $y = x^2$ và đường thẳng (D) có phương trình $y = 2x + m^2 + 1$.

a) Chứng minh rằng với mọi m, (D) luôn luôn cắt (P) tại hai điểm phân biệt A và B.

b) Kí hiệu x_A; x_B lần lượt là hoành độ của điểm A và điểm B. Hãy xác định giá trị của tham số m sao cho $x_A^2 + x_B^2 = 10$.

Câu 3. Cho nửa đường tròn tâm O, đường kính AB = 2R. Từ B, ta vẽ một cát tuyến cắt nửa đường tròn tại C và cắt tiếp tuyến Ax của nửa đường tròn tại P.

a) Chứng minh BC.BP không đổi.

b) Trong trường hợp BP = 2AP, hãy tính diện tích của hình được giới hạn bởi PA, PC và cung AC.

Câu 4. Tính : $\sqrt[3]{20+14\sqrt{2}} + \sqrt[3]{20-14\sqrt{2}}$.

BÀI GIẢI

A. LÍ THUYẾT. Bạn đọc tự giải.

B. CÁC BÀI TOÁN BẮT BUỘC

Câu 1. Vế trái $= \left(\dfrac{\sqrt{a}+2}{a+2\sqrt{a}+1} - \dfrac{\sqrt{a}-2}{a-1}\right)\dfrac{\sqrt{a}+1}{\sqrt{a}}$

$$= \left[\frac{\sqrt{a}+2}{(\sqrt{a}+1)^2} - \frac{\sqrt{a}-2}{(\sqrt{a}+1)(\sqrt{a}-1)}\right]\frac{\sqrt{a}+1}{\sqrt{a}}$$

$$= \frac{(\sqrt{a}+2)(\sqrt{a}-1)-(\sqrt{a}-2)(\sqrt{a}+1)}{(\sqrt{a}+1)^2(\sqrt{a}-1)}.\frac{\sqrt{a}+1}{\sqrt{a}}$$

$$= \frac{a+\sqrt{a}-2-a+\sqrt{a}+2}{(a-1).\sqrt{a}} = \frac{2}{a-1} \quad \text{(đpcm).}$$

Câu 2.

a) Phương trình hoành độ giao điểm của (P) và (D) là :

$$x^2 = 2x + m^2 + 1 \quad \Leftrightarrow \quad x^2 - 2x - m^2 - 1 = 0$$

Ta có : $\Delta' = 1 + m^2 + 1 = m^2 + 2 > 0$ với mọi m.

Vậy (D) luôn luôn cắt (P) tại hai điểm phân biệt A, B.

b) Theo định lí Viet ta có : $\begin{cases} S = x_A + x_B = 2 \\ P = x_A.x_B = -m^2 - 1 \end{cases}$

Do đó : $x_A^2 + x_B^2 = (x_A + x_B)^2 - 2x_Ax_B = 4 + 2m^2 + 2 = 10$

Suy ra $m = \pm\sqrt{2}$.

Câu 3. *(Hình 88)*

a) Xét tam giác vuông BAP có BP.BC = AB^2 = 4R^2 không đổi (đpcm)

b) Khi BP = 2AP thì $\widehat{ABP} = 30^0$.

Suy ra $BP = \dfrac{2AB}{\sqrt{3}} = \dfrac{4R\sqrt{3}}{3} \quad \Rightarrow \quad AP = \dfrac{2R\sqrt{3}}{3}$.

Diện tích tam giác APB là : $S_{ABP} = \dfrac{1}{2}AB.AP = \dfrac{2R^2\sqrt{3}}{3}$.

Diện tích tam giác ABC là : $S_{ABC} = \dfrac{R^2\sqrt{3}}{2}$.

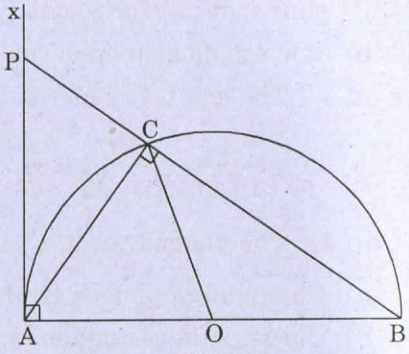
Diện tích hình quạt AOC là : $S_{\text{quạt}} = \dfrac{\pi R^2}{6}$.

Diện tích tam giác AOC là : $S_{AOC} = \dfrac{R^2\sqrt{3}}{4}$.

Diện tích hình viên phân AOC là :

$S_{VP} = S_{\text{quạt}} - D_{AOC}$

$$= \frac{\pi R^2}{6} - \frac{R^2\sqrt{3}}{4} = \frac{R^2(2\pi - 3\sqrt{3})}{12}$$



Hình 88

Gọi S là diện tích hình được giới hạn bởi PA, PC và cung AC, ta có :

$$S = S_{ABP} - S_{ABC} - S_{VP}$$

$$= \frac{2R^2\sqrt{3}}{3} - \frac{R^2\sqrt{3}}{2} - \frac{R^2(2\pi - 3\sqrt{3})}{12}$$

$$= \frac{5R^2\sqrt{3} - 2\pi R^2}{12} \text{ (đvdt).}$$

Câu 4. Đặt $x = \sqrt[3]{20+14\sqrt{2}} + \sqrt[3]{20-14\sqrt{2}}$

Ta có: $x^3 = 20 + 14\sqrt{2} + 20 - 14\sqrt{2} + 3(\sqrt[3]{20+14\sqrt{2}})^2\sqrt[3]{20-14\sqrt{2}} + 3\sqrt[3]{20+14\sqrt{2}}(\sqrt[3]{20-14\sqrt{2}})^2$

$$= 40 + 3\sqrt[3]{20+14\sqrt{2}}\sqrt[3]{20-14\sqrt{2}}(\sqrt[3]{20+14\sqrt{2}} + \sqrt[3]{20-14\sqrt{2}})$$

$$= 40 + 3\sqrt[3]{20^2 - (14\sqrt{2})^2}.x$$

$$= 40 + 6x$$

$\Leftrightarrow \quad x^3 - 6x - 40 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x^3 - 4x^2 + 4x^2 - 16x + 10x - 40 = 0$

$\Leftrightarrow \quad x^2(x-4) + 4x(x-4) + 10(x-4) = 0$

$\Leftrightarrow \quad (x-4)(x^2+4x+10) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \left[\begin{array}{l} x - 4 = 0 \\ x^2 + 4x + 10 = 0 \text{ (vô nghiệm)} \end{array}\right.$

$\Leftrightarrow \quad x = 4$

Vậy $\sqrt[3]{20+14\sqrt{2}} + \sqrt[3]{20-14\sqrt{2}} = 4.$

ĐỀ 61

ĐỀ THI TUYỂN SINH VÀO LỚP 10 THPT TP. HCM NĂM HỌC 2009 – 2010

Câu 1. Giải các phương trình và hệ phương trình sau :

a) $8x^2 - 2x - 1 = 0$ **b)** $\begin{cases} 2x + 3y = 3 \\ 5x - 6y = 12 \end{cases}$

c) $x^4 - 2x^2 - 3 = 0$ **d)** $3x^2 - 2\sqrt{6}x + 2 = 0$.

Câu 2.

a) Vẽ đồ thị (P) của hàm số $y = \dfrac{x^2}{2}$ và đường thẳng (D) : $y = x + 4$ trên cùng một hệ trục tọa độ.

b) Tìm tọa độ giao điểm của (P) và (D) bằng phép tính.

Câu 3. Thu gọn biểu thức sau :

$$A = \frac{4}{3 + \sqrt{5}} - \frac{8}{1 + \sqrt{5}} + \frac{15}{\sqrt{5}} \qquad B = \left(\frac{\sqrt{x} + \sqrt{y}}{1 - \sqrt{xy}} + \frac{\sqrt{x} - \sqrt{y}}{1 + \sqrt{xy}}\right) : \left(\frac{x + xy}{1 - xy}\right)$$

Câu 4. Cho phương trình $x^2 - (5m - 1)x + 6m^2 - 2m = 0$ (m là tham số)

a) Chứng minh phương trình luôn có nghiệm với mọi m;

b) Gọi x_1, x_2 là các nghiệm của phương trình. Tìm m để $x_1^2 + x_2^2 = 1$.

Câu 5. Cho tam giác ABC (AB < AC) có ba góc nhọn, nội tiếp đường tròn (O) có tâm O, bán kính R. Gọi H là giao điểm của ba đường cao AD, BE, CF của tam giác ABC. Gọi S là diện tích tam giác ABC.

a) Chứng minh rằng AEHF và AEDB là các tứ giác nội tiếp đường tròn.

b) Vẽ đường kính AK của đường tròn (O). Chứng minh tam giác ABD và tam giác AKC đồng dạng với nhau. Suy ra AB.AC = 2R.AD và $S = \dfrac{AB.BC.CA}{4R}$.

c) Gọi M là trung điểm của BC. Chứng minh EFDM là tứ giác nội tiếp đường tròn.

d) Chứng minh rằng OC vuông góc với DE và (DE + EF + FD).R = 2S.

BÀI GIẢI

Câu 1.

a) $8x^2 - 2x - 1 = 0$

Ta có : $\Delta' = 1 - 8(-1) = 9 \Rightarrow \sqrt{\Delta'} = 3 \Rightarrow x_1 = \dfrac{1 - 3}{8} = -\dfrac{1}{4}$; $x_2 = \dfrac{1 + 3}{8} = \dfrac{1}{2}$

Vậy phương trình đã cho có hai nghiệm là : $-\dfrac{1}{4}; \dfrac{1}{2}$.

b) $\begin{cases} 2x + 3y = 3 \\ 5x - 6y = 12 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4x + 6y = 6 \\ 5x - 6y = 12 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 9x = 18 \\ 5x - 6y = 12 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ 5x - 6y = 12 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = -\dfrac{1}{3} \end{cases}$

c) $x^4 - 2x^2 - 3 = 0$ (1)

Đặt $t = x^2 \geq 0$ (2)

Phương trình (1) trở thành : $t^2 - 2t - 3 = 0$ (3)

Giải (3), ta được : $t_1 = -1$ (loại); $t_2 = 3$

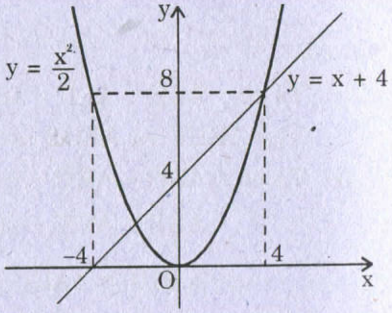
Thay vào (2), ta được : $x^2 = 3 \Leftrightarrow x = \pm\sqrt{3}$

Vậy phương trình (1) có hai nghiệm là : $\sqrt{3}; -\sqrt{3}$.

d) $3x^2 - 2\sqrt{6}x + 2 = 0$. Ta có : $\Delta' = 6 - 3.2 = 0$

Vậy phương trình đã cho có nghiệm kép là $x = \dfrac{\sqrt{6}}{3}$.

Câu 2.



a) Đồ thị parabol (P) : $y = \dfrac{x^2}{2}$ đi qua các điểm (0; 0), (2; 2), (4; 8) và (–4; 8).

Đồ thị đường thẳng (D) : y = x +4 đi qua hai điểm (0; 4) và (–2; 2).

b) Phương trình hoành độ giao điểm của (D) và (P) :

$$\frac{x^2}{2} = x + 4 \Leftrightarrow x^2 - 2x - 8 = 0 \Leftrightarrow x = -2;\ x = 4$$

- Với $x = -2 \Rightarrow y = 2$
- Với $x = 4 \Rightarrow y = 8$

Vậy (D) cắt (P) tại hai điểm phân biệt : (–2; 2), (4; 8).

Câu 3.

Ta có : $A = \dfrac{4}{3 + \sqrt{5}} - \dfrac{8}{1 + \sqrt{5}} + \dfrac{15}{\sqrt{5}} = \dfrac{4(3 - \sqrt{5})}{4} - \dfrac{8(\sqrt{5} - 1)}{4} + \dfrac{15\sqrt{5}}{5}$

$= 3 - \sqrt{5} - 2\sqrt{5} + 2 + 3\sqrt{5} = 5.$

$$B = \left(\frac{\sqrt{x} + \sqrt{y}}{1 - \sqrt{xy}} + \frac{\sqrt{x} - \sqrt{y}}{1 + \sqrt{xy}}\right) : \left(\frac{x + xy}{1 - xy}\right)$$

$$= \left[\frac{(\sqrt{x} + \sqrt{y})(1 + \sqrt{xy})}{1 - xy} + \frac{(\sqrt{x} - \sqrt{y})(1 - \sqrt{xy})}{1 - xy}\right] : \left(\frac{x + xy}{1 - xy}\right)$$

$$= \left(\frac{\sqrt{x} + x\sqrt{y} + \sqrt{y} + y\sqrt{x} + \sqrt{x} - x\sqrt{y} - \sqrt{y} + y\sqrt{x}}{1 - xy}\right).\left(\frac{1 - xy}{x + xy}\right)$$

$$= \left(\frac{2\sqrt{x} + 2y\sqrt{x}}{1 - xy}\right).\left(\frac{1 - xy}{x + xy}\right) = \frac{2\sqrt{x}(1 + y)}{x + xy} = \frac{2}{\sqrt{x}}$$

Vậy A = 5 và $B = \frac{2}{\sqrt{x}}$.

Câu 4. $x^2 - (5m - 1)x + 6m^2 - 2m = 0$ (1)

a) Ta có : $\Delta = (5m - 1)^2 - 4(6m^2 - 2m) = m^2 - 2m + 1 = (m - 1)^2 \ge 0 \ \forall m$

Vậy phương trình (1) luôn có nghiệm với mọi m.

b) Gọi x_1, x_2 là hai nghiệm của phương trình (1).

Ta có : $x_1 = \frac{5m - 1 + m - 1}{2} = 3m - 1$; $x_2 = \frac{5m - 1 - m + 1}{2} = 2m$.

Do đó : $x_1^2 + x_2^2 = 1 \Leftrightarrow (3m - 1)^2 + 4m^2 = 1 \Leftrightarrow 13m^2 - 6m = 0$

$\Leftrightarrow m = 0;\ m = \frac{6}{13}$.

Câu 5.

a) Ta có : $\widehat{AEH} + \widehat{AFH} = 180^0$; $\widehat{AEB} = \widehat{ADB} = 90^0$

Vậy AEHF và AEDB là các tứ giác nội tiếp đường tròn.

b) Ta có : $\widehat{ABD} = \widehat{AKC}$ (cùng chắn cung AC)

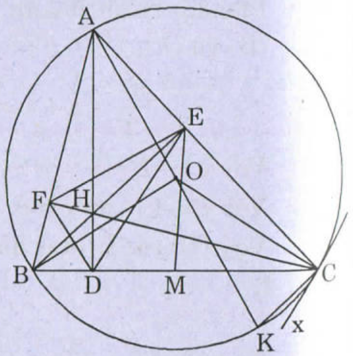
$\widehat{ADB} = \widehat{ACK} = 90^0$

$\Rightarrow \Delta ABD \backsim \Delta AKC$ (g-g) $\Rightarrow \frac{AB}{AK} = \frac{AD}{AC}$

$\Rightarrow AB.AC = AK.AD = 2R.AD$

$\Rightarrow AD = \frac{AB.AC}{2R}$

Do đó : $S = \frac{1}{2}AD.BC = \frac{AB.BC.CA}{4R}$.



c) Gọi M là trung điểm của BC.

Ta có : $\widehat{BFH} + \widehat{BDH} = 180^0$

Do đó tứ giác BFHD nội tiếp, suy ra : $\widehat{FDB} = \widehat{FHB}$

Mặt khác tứ giác AEHF nội tiếp nên : $\widehat{FHB} = \widehat{FAE} \Rightarrow \widehat{FDB} = \widehat{FAE}$ (1)

Tam giác BEC vuông tại E nên tam giác MEB cân tại M, suy ra :

$\widehat{MEB} = \widehat{MBE}$

Tứ giác AEDB nội tiếp nên $\widehat{MBE} = \widehat{DAE} \Rightarrow \widehat{MEB} = \widehat{DAE}$

Tứ giác AEHF nội tiếp nên $\widehat{FEH} = \widehat{FAH}$

$\Rightarrow \widehat{MEF} = \widehat{MEB} + \widehat{FEH} = \widehat{DAE} + \widehat{FAH} = \widehat{FAE}$ (2)

Từ (1) và (2), suy ra : $\widehat{FDB} = \widehat{MEF}$

Vậy tứ giác EFDM là tứ giác nội tiếp.

d) Kẻ tia Cx là tiếp tuyến của (O).

Ta có : $\widehat{xCB} = \widehat{BAC}$ (cùng chắn cung BC)

$\widehat{BAC} = \widehat{EDC}$ (do tứ giác AEDB nội tiếp)

$\Rightarrow \widehat{xCB} = \widehat{EDC} \Rightarrow Cx \ // \ DE$

Mà $OC \perp Cx \Rightarrow OC \perp ED$.

Tương tự, ta được : $OA \perp EF$; $OB \perp FD$.

Vì tam giác ABC là tam giác nhọn nên O nằm trong tam giác ABC.

Do đó : $S_{ABC} = S_{AEOF} + S_{BFOD} + S_{CEOD} = \frac{1}{2}OA.EF + \frac{1}{2}OB.FD + \frac{1}{2}OC.DE$

Suy ra : (DE + EF + FD).R = 2S.

ĐỀ 62

ĐỀ THI TUYỂN SINH VÀO LỚP 10 THPT HÀ NỘI NĂM HỌC 2009 – 2010

Câu 1. Cho biểu thức $A = \frac{x}{x - 4} + \frac{1}{\sqrt{x} - 2} + \frac{1}{\sqrt{x} + 2}$ với $x \ge 0$ và $x \ne 4$.

1. Rút gọn biểu thức A.
2. Tính giá trị của biểu thức A khi x = 25.
3. Tìm giá trị của x để $A = -\frac{1}{3}$.

Câu 2. *Giải bài toán sau bằng cách lập phương trình hoặc hệ phương trình :*

Hai tổ sản xuất cùng may một loại áo. Nếu tổ thứ nhất may trong 3 ngày, tổ thứ hai may trong 5 ngày thì cả hai tổ may được 1310 chiếc áo. Biết rằng trong một ngày tổ thứ nhất may được nhiều hơn tổ thứ hai là 10 chiếc áo. Hỏi mỗi tổ trong một ngày may được bao nhiêu chiếc áo ?

Câu 3. Cho phương trình (ẩn x) : $x^2 - 2(m + 1)x + m^2 + 2 = 0$

1. Giải phương trình đã cho khi m = 1.
2. Tìm giá trị của m để phương trình đã cho có hai nghiệm phân biệt $x_1^2 + x_2^2 = 10$.

Câu 4. Cho đường tròn (O; R) và điểm A nằm bên ngoài đường tròn. Kẻ các tiếp tuyến AB, AC với đường tròn (B, C là các tiếp điểm).

1. Chứng minh ABOC là tứ giác nội tiếp.
2. Gọi E là giao điểm của BC và OA. Chứng minh BE vuông góc với OA và $OE.OA = R^2$.

3. Trên cung nhỏ BC của đường tròn (O; R) lấy điểm K bất kỳ (K khác B và C). Tiếp tuyến tại K của đường tròn (O; R) cắt AB, AC theo thứ tự các điểm P, Q. Chứng minh tam giác APQ có chu vi không đổi khi K chuyển động trên cung nhỏ BC.

4. Đường thẳng qua O và vuông góc với OA cắt các đường thẳng AB, AC theo thứ tự tại các điểm M, N. Chứng minh PM + QN ≥ MN.

Câu 5. Giải phương trình : $\sqrt{x^2 - \frac{1}{4} + \sqrt{x^2 + x + \frac{1}{4}}} = \frac{1}{2}\left(2x^3 + x^2 + 2x + 1\right)$.

BÀI GIẢI

Câu 1.

1. Ta có : $A = \frac{x}{x-4} + \frac{1}{\sqrt{x}-2} + \frac{1}{\sqrt{x}+2} = \frac{x + \sqrt{x} + 2 + \sqrt{x} - 2}{\left(\sqrt{x}-2\right)\left(\sqrt{x}+2\right)}$

$$= \frac{x + 2\sqrt{x}}{\left(\sqrt{x}-2\right)\left(\sqrt{x}+2\right)} = \frac{\sqrt{x}\left(\sqrt{x}+2\right)}{\left(\sqrt{x}-2\right)\left(\sqrt{x}+2\right)} = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-2}.$$

2. Khi x = 25, ta có : $A = \frac{\sqrt{25}}{\sqrt{25}-2} = \frac{5}{5-2} = \frac{5}{3}$.

3. Ta có : $A = -\frac{1}{3} \Leftrightarrow \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-2} = -\frac{1}{3} \Leftrightarrow 3\sqrt{x} = -\sqrt{x} + 2 \Leftrightarrow 4\sqrt{x} = 2$

$$\Leftrightarrow \sqrt{x} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow x = \frac{1}{4}.$$

Câu 2. Gọi x (chiếc) ($x \in \mathbb{N}^*$) là số áo của tổ thứ hai may được trong một ngày.

Số áo của tổ thứ nhất may được trong một ngày là x + 10 (chiếc).

Trong 3 ngày tổ thứ nhất may được 3(x + 10) chiếc.

Trong 5 ngày tổ thứ hai may được 5x chiếc.

Theo đề bài, ta có phương trình : 3(x + 10) + 5x = 1310

Vậy trong 1 ngày tổ thứ hai may được 160 chiếc áo và tổ thứ nhất may được : 160 + 10 = 170 chiếc.

Câu 3. $x^2 - 2(m+1)x + m^2 + 2 = 0$ (1)

1. Khi m = 1, phương trình (1) trở thành : $x^2 - 4x + 3 = 0$

Ta có : a + b + c = 1 + (−4) + 3 = 0

Vậy phương trình có hai nghiệm là : $x_1 = 1$; $x_2 = \frac{c}{a} = 3$

2. Để phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt thì :

$$\Delta' > 0 \Leftrightarrow [-(m+1)]^2 - (m^2 + 2) = 2m - 1 > 0 \Leftrightarrow m > \frac{1}{2}$$

Gọi x_1, x_2 là hai nghiệm của phương trình (1).

Ta có : $x_1 + x_2 = 2(m+1)$; $x_1x_2 = m^2 + 2$

Do đó : $x_1^2 + x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2 = [2(m+1)]^2 - 2(m^2 + 2)$

$$= 2m^2 + 8m = 10$$

$$\Leftrightarrow 2m^2 + 8m - 10 = 0 \Leftrightarrow m^2 + 4m - 5 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m = -5 \\ m = 1 \end{array}\right.$$

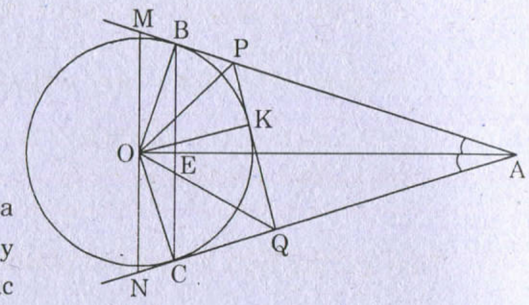
Câu 4.

1. Ta có : $\widehat{ABO} = 90^0$ (tính chất tiếp tuyến)

$\widehat{ACO} = 90^0$ (tính chất tiếp tuyến)

$\Rightarrow \widehat{ABO} + \widehat{ACO} = 180^0$

Vậy tứ giác ABOC nội tiếp.



2. Ta có : AB = AC (tính chất tiếp tuyến).

Suy ra tam giác ABC cân.

Mặt khác AO là phân giác của $\widehat{BAC}$ (tính chất tiếp tuyến), suy ra AO là đường cao của tam giác ABC hay BE ⊥ AO.

Trong tam giác vuông ABO, ta có : $OB^2 = OE.OA \Rightarrow R^2 = OE.OA$.

3. Ta có : PK = PB (tính chất tiếp tuyến)

KQ = QC (tính chất tiếp tuyến).

Chu vi (ΔAPQ) = AP + AQ + QP = AP + AQ + PK + KQ

= AP + PK + AQ + KQ = AP + PB + AQ + QC

= AB + AC = 2AB.

Vậy chu vi (ΔAPQ) không đổi.

4. $\Delta OMP \backsim \Delta QNO \Rightarrow \frac{MP}{ON} = \frac{OM}{QN}$

$$\Rightarrow MP.QN = OM.ON = \frac{MN}{2}.\frac{MN}{2} = \frac{MN^2}{4} \text{ (g-g)}$$

$$\Rightarrow MN^2 = 4MP.QN$$

$$\Rightarrow MN = 2\sqrt{MP.QN} \le MP + QN \text{ (bất đẳng thức Cô-si)}$$

Hay MP + NQ ≥ MN.

Câu 5. $\sqrt{x^2 - \frac{1}{4} + \sqrt{x^2 + x + \frac{1}{4}}} = \frac{1}{2}\left(2x^3 + x^2 + 2x + 1\right)$ (1)

$$\Leftrightarrow 2\sqrt{x^2 - \frac{1}{4} + \sqrt{x^2 + x + \frac{1}{4}}} = 2x^3 + x^2 + 2x + 1$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{4x^2 - 1 + 4\sqrt{x^2 + x + \frac{1}{4}}} = x^2(2x+1) + (2x+1)$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{4x^2 - 1 + 2\sqrt{4x^2 + 4x + 1}} = (2x+1)\left(x^2+1\right)$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{(2x+1)(2x-1) + 2|2x+1|} = (2x+1)\left(x^2+1\right) \qquad (2)$$

Dễ thấy vế trái của (1) ≥ 0 với $\forall x$.

Mặt khác $x^2 + 1 > 0 \Rightarrow 2x + 1 \geq 0 \Rightarrow x \geq -\frac{1}{2}$.

$$(2) \Leftrightarrow \sqrt{(2x+1)(2x-1) + 2(2x+1)} = (2x+1)\left(x^2+1\right)$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{(2x+1)(2x-1+2)} = (2x+1)\left(x^2+1\right)$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{(2x+1)^2} = (2x+1)\left(x^2+1\right) \Leftrightarrow 2x+1 = (2x+1)\left(x^2+1\right)$$

$$\Leftrightarrow x^2(2x+1) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = -\frac{1}{2} \end{array}\right.$$

Thay các giá trị x ở trên vào phương trình (1), ta thấy thỏa mãn.

Vậy phương trình (1) có hai nghiệm là : $x = 0$; $x = -\frac{1}{2}$.

ĐỀ 63

ĐỀ THI TUYỂN SINH VÀO LỚP 10 THPT CHUYÊN TP. HCM NĂM HỌC 2009 – 2010

Câu 1.

1. Giải hệ phương trình $\begin{cases} x - y - xy = -1 \\ x^2y - xy^2 = 2 \end{cases}$

2. Cho phương trình : $x^2 - 2mx - 16 + 5m^2 = 0$ (x là ẩn số)

a) Tìm m để phương trình có nghiệm.

b) Gọi x_1, x_2 là các nghiệm của phương trình. Tính giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của biểu thức $A = x_1(5x_1 + 3x_2 - 17) + x_2(5x_2 + 3x_1 - 17)$.

Câu 2.

1. Thu gọn biểu thức $A = \dfrac{\sqrt{45 + 27\sqrt{2}} + \sqrt{45 - 27\sqrt{2}}}{\sqrt{5 + 3\sqrt{2}} - \sqrt{5 - 3\sqrt{2}}} - \dfrac{\sqrt{3 + \sqrt{2}} + \sqrt{3 - \sqrt{2}}}{\sqrt{3 + \sqrt{2}} - \sqrt{3 - \sqrt{2}}}$.

2. Cho x, y, z là ba số dương thỏa mãn điều kiện $xyz = 2$. Tính giá trị của biểu thức $B = \dfrac{x}{xy + x + 2} + \dfrac{y}{yz + y + 1} + \dfrac{2z}{zx + 2z + 2}$.

Câu 3.

1. Cho ba số thực a, b, c. Chứng minh :

$$a^2 + b^2 + c^2 \geq ab + bc + ca + \frac{(a-b)^2}{26} + \frac{(b-c)^2}{6} + \frac{(c-a)^2}{2009}.$$

2. Cho $a > 0$ và $b < 0$. Chứng minh : $\dfrac{1}{a} \geq \dfrac{2}{b} + \dfrac{8}{2a - b}$.

Câu 4.

1. Cho hệ phương trình $\begin{cases} ax + by = 5 \\ bx + ay = 5 \end{cases}$ (a, b nguyên dương và a khác b).

Tìm a, b để hệ có nghiệm (x; y) là các số nguyên dương.

2. Chứng minh rằng không tồn tại các số nguyên x, y, z thỏa hệ :

$$\begin{cases} x^2 - 3xy + 3y^2 - z^2 = 31 \\ x^2 + xy + 8z^2 = 100 \end{cases}$$

Câu 5. Cho tam giác ABC (AB < AC) có đường trung tuyến AM và đường phân giác trong AD (M, D thuộc BC). Đường tròn ngoại tiếp tam giác ADM cắt các cạnh AB, AC lần lượt tại E và F. Chứng minh BE = CF.

Câu 6. Cho ABCD là hình thoi có cạnh bằng 1. Giả sử tồn tại điểm M thuộc cạnh BC và N thuộc cạnh CD sao cho tam giác CMN có chu vi bằng 2 và $\widehat{BAD} = 2\widehat{MAN}$. Tính các góc của hình thoi ABCD.

Câu 7. Cho a, b là các số dương thỏa $\dfrac{a}{1+a} + \dfrac{2b}{1+b} = 1$. Chứng minh $ab^2 \leq \dfrac{1}{8}$.

BÀI GIẢI

Câu 1.

1. $\begin{cases} x - y - xy = -1 \\ x^2y - xy^2 = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x(1-y) + 1 - y = 0 \\ x^2y - xy^2 = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x+1)(1-y) = 0 \\ x^2y - xy^2 = 2 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x = -1 \\ x^2y - xy^2 = 2 \end{cases} \\ \begin{cases} y = 1 \\ x^2y - xy^2 = 2 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x = -1 \\ y^2 + y - 2 = 0 \end{cases} \\ \begin{cases} y = 1 \\ x^2 - x - 2 = 0 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x = -1 \\ y = 1 \vee y = -2 \end{cases} \\ \begin{cases} y = 1 \\ x = -1 \vee x = 2 \end{cases} \end{array}\right.$$

Vậy hệ đã cho có 3 nghiệm là : (–1; 1), (–1; –2), (2; 1).

2. $x^2 - 2mx - 16 + 5m^2 = 0$

a) Ta có : $\Delta' = 16 - 4m^2$

Phương trình đã cho có nghiệm khi và chỉ khi :

$$\Delta' \geq 0 \Leftrightarrow 16 - 4m^2 \geq 0 \Leftrightarrow -2 \leq m \leq 2.$$

b) Gọi x_1, x_2 là các nghiệm của phương trình.

Ta có : $x_1 + x_2 = 2m$; $x_1x_2 = 5m^2 - 16$

$$\Rightarrow A = x_1(5x_1 + 3x_2 - 17) + x_2(5x_2 + 3x_1 - 17)$$
$$= 5(x_1^2 + x_2^2) + 6x_1x_2 - 17(x_1 + x_2)$$
$$= 5[(x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2] + 6x_1x_2 - 17(x_1 + x_2)$$
$$= 5(x_1 + x_2)^2 - 4x_1x_2 - 17(x_1 + x_2)$$
$$= 20m^2 - 4(5m^2 - 16) - 17.2m = -34m + 64$$

Vì $-2 \le m \le 2 \Rightarrow -4 \le A \le 132$

- Khi $m = 2$ thì $A = -4$.
- Khi $m = -2$ thì $A = 132$.

Vậy giá trị nhỏ nhất của A là -4 và giá trị lớn nhất của A là 132.

Câu 2.

1. Ta có : $\sqrt{45 + 27\sqrt{2}} + \sqrt{45 - 27\sqrt{2}} = 3(\sqrt{5 + 3\sqrt{2}} + \sqrt{5 - 3\sqrt{2}})$

$$A = \frac{3(\sqrt{5+3\sqrt{2}} + \sqrt{5-3\sqrt{2}})}{\sqrt{5+3\sqrt{2}} - \sqrt{5-3\sqrt{2}}} - \frac{\sqrt{3+\sqrt{2}} + \sqrt{3-\sqrt{2}}}{\sqrt{3+\sqrt{2}} - \sqrt{3-\sqrt{2}}}$$
$$= \frac{3(\sqrt{5+3\sqrt{2}} + \sqrt{5-3\sqrt{2}})^2}{6\sqrt{2}} - \frac{(\sqrt{3+\sqrt{2}} + \sqrt{3-\sqrt{2}})^2}{2\sqrt{2}}$$
$$= \frac{10 + 2\sqrt{7}}{2\sqrt{2}} - \frac{6 + 2\sqrt{7}}{2\sqrt{2}} = \frac{2}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}.$$

2. Với điều kiện $xyz = 2$, ta có :

$$B = \frac{x}{xy + x + 2} + \frac{xy}{xyz + xy + x} + \frac{2xyz}{xyzx + 2xyz + 2xy}$$
$$= \frac{x}{xy + x + 2} + \frac{xy}{2 + xy + x} + \frac{2.2}{2x + 2.2 + 2xy}$$
$$= \frac{x}{xy + x + 2} + \frac{xy}{2 + xy + x} + \frac{2}{x + 2 + xy} = \frac{x + xy + 2}{xy + x + 2} = 1.$$

Câu 3.

1. Ta có : $a^2 + b^2 + c^2 \ge ab + bc + ca + \frac{(a-b)^2}{26} + \frac{(b-c)^2}{6} + \frac{(c-a)^2}{2009}$

$$\Leftrightarrow 2a^2 + 2b^2 + 2c^2 \ge 2ab + 2bc + 2ca + \frac{(a-b)^2}{13} + \frac{(b-c)^2}{3} + \frac{2(c-a)^2}{2009}$$
$$\Leftrightarrow 2a^2 + 2b^2 + 2c^2 - 2ab - 2bc - 2ca \ge \frac{(a-b)^2}{13} + \frac{(b-c)^2}{3} + \frac{2(c-a)^2}{2009}$$
$$\Leftrightarrow (a-b)^2 + (b-c)^2 + (b-c)^2 \ge \frac{(a-b)^2}{13} + \frac{(b-c)^2}{3} + \frac{2(c-a)^2}{2009}$$

$\Leftrightarrow \frac{12(a-b)^2}{13} + \frac{2(b-c)^2}{3} + \frac{2007(c-a)^2}{2009} \ge 0$ luôn đúng với ba số thực a, b, c.

2. Ta có : $\frac{1}{a} \ge \frac{2}{b} + \frac{8}{2a-b} \Leftrightarrow \frac{1}{a} - \frac{2}{b} - \frac{8}{2a-b} \ge 0 \Leftrightarrow \frac{b-2a}{ab} - \frac{8}{2a-b} \ge 0$

$$\Leftrightarrow \frac{-(b-2a)^2 - 8ab}{ab(2a-b)} \ge 0 \Leftrightarrow \frac{-(b+2a)^2}{ab(2a-b)} \ge 0 \qquad (1)$$

Vì $a > 0$ và $b < 0$ nên (1) luôn đúng.

Câu 4.

1. $\begin{cases} ax + by = 5 & (1) \\ bx + ay = 5 & (2) \end{cases}$

Từ (1) và (2), ta được : $(a - b)(x - y) = 0 \Leftrightarrow x = y$ (vì $a \ne b$)

Thay vào (1), ta được : $x = \frac{5}{a+b} \Rightarrow y = \frac{5}{a+b}$

Do x là số nguyên và a, b nguyên dương nên $a + b$ là ước nguyên dương ≥ 2 của 5.

$$\Rightarrow a + b = 5 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} a = 1 \\ b = 4 \end{cases} \\ \begin{cases} a = 4 \\ b = 1 \end{cases} \\ \begin{cases} a = 2 \\ b = 3 \end{cases} \\ \begin{cases} a = 3 \\ b = 2 \end{cases} \end{array}\right.$$

2. $\begin{cases} x^2 - 3xy + 3y^2 - z^2 = 31 & (1) \\ x^2 + xy + 8z^2 = 100 & (2) \end{cases}$

Giả sử rằng tồn tại các số nguyên x, y, z thỏa hệ đã cho.

Từ (1) và (2), ta được : $9x^2 - 23xy + 24y^2 = 348$

$$\Leftrightarrow 5(2x^2 - 5xy + 5y^2) = (x - y)^2 + 348 \qquad (3)$$

Dễ thấy :

- $5(2x^2 - 5xy + 5y^2)$ chia hết cho 5.
- $(x - y)^2$ chia cho 5 hoặc dư 0, hoặc dư 1, hoặc dư 4.
- 348 chia 5 dư 3.

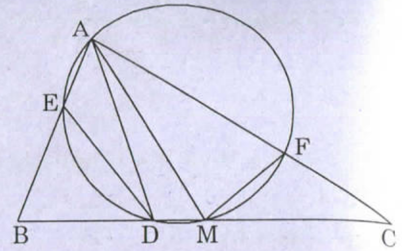
Do đó :

- Vế trái của (3) chia hết cho 5.
- Vế phải của (3) chia cho 5 có dư hoặc là 3, hoặc là 4, hoặc là 2.

$\Rightarrow$ vô lí.

Vậy không tồn tại các số nguyên x, y, z thỏa hệ đã cho.

Câu 5. $\Delta CFM \backsim \Delta CDA \Rightarrow \frac{CF}{CM} = \frac{CD}{CA}$ (1)



$\Delta BED \backsim \Delta BMA \Rightarrow \dfrac{BE}{BM} = \dfrac{BD}{BA}$ (2)

Vì AD là phân giác của góc A nên :

$\dfrac{CD}{BD} = \dfrac{AC}{AB} \Rightarrow \dfrac{CD}{AC} = \dfrac{BD}{AB}$ (3)

Vì M là trung điểm của BC nên :

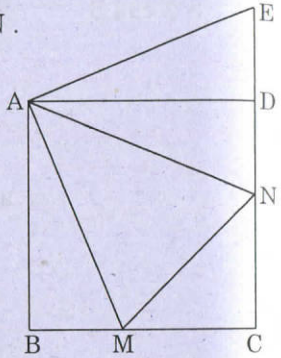
$BM = CM \Rightarrow BE = CF$.

Câu 6. Trong nửa mặt phẳng bờ AD không chứa điểm M, ta lấy điểm E sao cho $AE = AM$ và $\widehat{DAE} = \widehat{BAM}$

$\Delta ADE = \Delta ABM \Rightarrow DE = BM;\ \widehat{ADE} = \widehat{ABM}$

Dễ thấy ABCD là hình thoi nên $\widehat{ADN} = \widehat{ABM} \Rightarrow \widehat{ADE} = \widehat{ADN}$ (1)

Ta có : $\widehat{BAD} = 2\widehat{MAN}$



Do đó : $\widehat{MAN} = \widehat{BAM} + \widehat{NAD} = \widehat{DAE} + \widehat{NAD} = \widehat{EAN}$.

Mặt khác : $\widehat{MAN} = \widehat{EAN}$; $AM = AE$

$\Rightarrow \Delta ANM = \Delta ANE \Rightarrow NE = NM$

Lại có : $2 = CM + CN + MN = CM + CN + NE$

Mà $2 = CB + CD = CM + MB + CN + ND$

$= CM + DE + CN + ND$

$\Rightarrow CM + CN + NE = CM + DE + CN + ND$

$\Rightarrow NE = ND + DE \Rightarrow$ D thuộc NE (2)

Từ (1) và (2), suy ra : $\widehat{ADE} = \widehat{ADN} = 90^0$

Hình thoi ABCD có $\widehat{ADC} = 90^0$ nên là hình vuông.

Vậy các góc của hình thoi ABCD đều bằng 90^0.

Câu 7. Ta có : $\dfrac{a}{1+a} + \dfrac{2b}{1+b} = 1 \Leftrightarrow \dfrac{2b}{1+b} = 1 - \dfrac{a}{1+a} \Leftrightarrow \dfrac{2b}{1+b} = \dfrac{1}{1+a}$

$\Leftrightarrow \dfrac{1+b}{2b} = 1 + a \Leftrightarrow a = \dfrac{1-b}{2b}$

$\Rightarrow ab^2 = \dfrac{1-b}{2b}b^2 = \dfrac{(1-b)b}{2} = \dfrac{1}{2}\left[-\left(b - \dfrac{1}{2}\right)^2 + \dfrac{1}{4}\right] \le \dfrac{1}{8}$

Vậy $ab^2 \le \dfrac{1}{8}$.

ĐỀ 64

ĐỀ THI TUYỂN SINH VÀO LỚP 10 THPT CHUYÊN HÀ NỘI (CHUYÊN TOÁN – TIN) NĂM HỌC 2009 – 2010

Câu 1.

1. Tìm các số nguyên dương n để $A = \dfrac{(n-8)^2 - 48}{n+5}$ có giá trị nguyên dương.
2. Tìm các số nguyên dương x, y thỏa mãn đẳng thức $x^2 + y(y^2 + y - 3x) = 0$.

Câu 2. Giải hệ phương trình (x, y, z là ẩn) :

$$\begin{cases}(x^2+1)y = 2x^2\\(y^2+1)z = 2y^2\\(z^2+1)x = 2z^2\end{cases}$$

Câu 3. Cho ΔABC có ba góc nhọn nội tiếp (O). Gọi BD và CE là hai đường cao của tam giác ABC.

1. Chứng minh AD. AC = AE. AB.
2. Tia AO cắt BC tại A_1 và cắt cung nhỏ BC tại A_2. Tia BO cắt AC tại B_1 và cắt cung nhỏ AC tại B_2. Tia CO cắt BA tại C_1 và cắt cung nhỏ AB tại C_2. Chứng minh : $\dfrac{A_1A_2}{AA_1} + \dfrac{B_1B_2}{BB_1} + \dfrac{CC_2}{CC_1} = 1$.
3. Từ A vẽ Ax ⊥ DE. Cho cạnh BC cố định, đỉnh A di động trên cung lớn BC sao cho ΔABC có ba góc nhọn. Chứng minh tia Ax luôn đi qua một điểm cố định.

Câu 4. Cho đa thức $P(x) = x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d$ (a, b, c, d là các hằng số). Biết rằng P(1) = 10, P(2) = 20, P(3) = 30. Tính giá trị của biểu thức $\dfrac{P(12) - P(8)}{10} + 25$.

Câu 5. Chứng minh rằng : Nếu ba điểm A, B, C không có điểm nào nằm bên ngoài đường tròn (O) sao cho ΔABC có ba góc nhọn thì chu vi của đường tròn ngoại tiếp ΔABC không lớn hơn chu vi (O).

BÀI GIẢI

Câu 1.

1. Ta có : $(n-8)^2 - 48 = n^2 - 16n + 16$

Do đó : $A = n - 21 + \dfrac{121}{n+5}$

- $121 = 11^2$ và $n + 5 \ge 6$; $n + 5 \in \mathbb{Z}$
- $n + 5 = 11 \Rightarrow n = 6$; $A = -4$
- $n + 5 = 121 \Rightarrow n = 116$; $A = 96$

Vậy n = 116.

2. Ta có : $x^2 + y(y^2 + y - 3x) = 0 \Leftrightarrow x^2 - 3xy + y^2 + y^3 = 0$ (1)

Coi (1) là phương trình bậc hai ẩn x

Ta có : $\Delta = y^2(5 - 4y)$

Với $y \ge 2 \Rightarrow \Delta < 0 \Rightarrow$ (1) vô nghiệm.

Với y = 1 thì (1) trở thành : $x^2 - 3x + 2 = 0 \Leftrightarrow x = 1; x = 2$.

Vậy các số nguyên dương cần tìm là (1; 1), (2; 1).

Câu 2.

$$\begin{cases}(x^2+1)y = 2x^2\\(y^2+1)z = 2y^2\\(z^2+1)x = 2z^2\end{cases}$$

- Nếu một trong 3 số x, y, z bằng 0 thì hai số còn lại bằng 0. Dễ thấy x = y = z = 0 là một nghiệm của hệ.
- Xét trường hợp cả ba số x, y, z khác 0.

$$\begin{cases}(x^2+1)y = 2x^2\\(y^2+1)z = 2y^2\\(z^2+1)x = 2z^2\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\dfrac{x^2+1}{x^2} = \dfrac{2}{y}\\[2mm]\dfrac{y^2+1}{y^2} = \dfrac{2}{z}\\[2mm]\dfrac{z^2+1}{z^2} = \dfrac{2}{x}\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}1+\dfrac{1}{x^2}-\dfrac{2}{y} = 0 \quad (1)\\[2mm]1+\dfrac{1}{y^2}-\dfrac{2}{z} = 0 \quad (2)\\[2mm]1+\dfrac{1}{z^2}-\dfrac{2}{x} = 0 \quad (3)\end{cases}$$

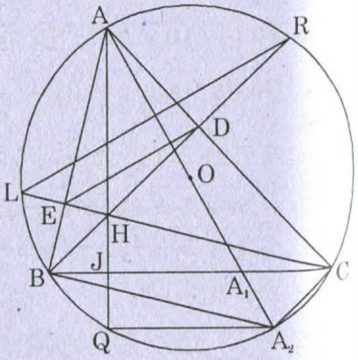
Từ (1), (2) và (3) ta được : $\left(1+\dfrac{1}{x^2}-\dfrac{2}{x}\right)+\left(1+\dfrac{1}{y^2}-\dfrac{2}{y}\right)+\left(1+\dfrac{1}{z^2}-\dfrac{2}{z}\right) = 0$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{1}{x}-1\right)^2+\left(\frac{1}{y}-1\right)^2+\left(\frac{1}{z}-1\right)^2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases}\dfrac{1}{x}-1 = 0\\[2mm]\dfrac{1}{y}-1 = 0\\[2mm]\dfrac{1}{z}-1 = 0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x = 1\\y = 1\\z = 1\end{cases}$$

Vậy hệ đã cho có nghiệm là : (0; 0; 0), (1; 1; 1).

Câu 3.

1. Ta có : $\Delta ABD \backsim \Delta ACE \Rightarrow AD.AC = AE.AB$.



2. Gọi H là trực tâm của ΔABC.

Tia AH cắt BC tại J và cắt cung BC tại Q.

Suy ra : $\dfrac{A_1A_2}{AA_1} = \dfrac{JQ}{JA}$

Và $\dfrac{JH}{JA} = \dfrac{JQ}{JA} = \dfrac{S_{\Delta BHC}}{S_{\Delta BAC}}$

Tương tự, ta được :

$$\frac{B_1B_2}{BB_1} = \frac{S_{\Delta AHC}}{S_{\Delta BAC}};\ \frac{C_1C_2}{CC_1} = \frac{S_{\Delta AHB}}{S_{\Delta BAC}}$$

Do ΔABC là tam giác nhọn nên điểm H nằm trong tam giác.

Suy ra : $S_{\Delta BHC} + S_{\Delta BHA} + S_{\Delta AHC} = S_{\Delta BAC}$

$$\frac{A_1A_2}{AA_1}+\frac{B_1B_2}{BB_1}+\frac{CC_2}{CC_1} = \frac{S_{\Delta BHC}+S_{\Delta BHA}+S_{\Delta AHC}}{S_{\Delta BAC}} = \frac{S_{\Delta BAC}}{S_{\Delta BAC}} = 1.$$

3. Tia BD cắt cung AC tại R, tia CE cắt cung AB tại L.

Dễ dàng chứng minh được DE // RL nên $LR \perp Ax \Rightarrow \overset{\frown}{AL} = \overset{\frown}{AR} \Rightarrow Ax$ đi qua tâm O khi A di động.

Câu 4. Đặt Q(x) = P(x) – 10x

Ta có : Q(1) = Q(2) = Q(3) = 0

Mà Q(x) = (x – 1)(x – 2)(x – 3)(x – r)

P(x) = (x – 1)(x – 2)(x – 3)(x – r) + 10x

$$\Rightarrow A = \frac{P(12)+P(-8)}{10} + 25 = 2009.$$

Câu 5. Gọi đường tròn ngoại tiếp ΔABC là (I), I nằm trong ΔABC.

- Nếu A, B, C nằm trên (O) thì (I) và (O) trùng nhau.
- Nếu (O) đựng (I) hoặc (O) và (I) tiếp xúc trong với nhau thì đường kính của (I) nằm trong (O) suy ra chu vi của (I) nhỏ hơn chu vi của (O).
- Nếu (O) và (I) cắt nhau tại M, N. Vì ΔABC có ba góc nhọn nên số đo cung nhỏ MN < 180^0. Suy ra cung lớn MN > 180^0, do đó tồn tại đường kính của (I) nằm trong (O). Vậy chu vi của (I) nhỏ hơn chu vi của (O).

ĐỀ 65

ĐỀ THI TUYỂN SINH VÀO LỚP 10 THPT CHUYÊN QUỐC HỌC HUẾ NĂM HỌC 2009 – 2010

Câu 1. Cho phương trình : $x^2 - mx - m - 1 = 0$ (m là tham số).

a) Tìm tất cả các giá trị của m để phương trình trên có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2.

b) Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $S = \dfrac{m^2+2m}{x_1^2+x_2^2+2}$.

Câu 2.

a) Cho phương trình $ax^2 + bx + c = 0$ có hai nghiệm dương phân biệt. Chứng minh rằng phương trình $cx^2 + bx + a = 0$ cũng có hai nghiệm dương phân biệt.

b) Giải phương trình : $\sqrt{\dfrac{2-x}{x+4}} - 2\sqrt{\dfrac{x+4}{2-x}} + 1 = 0$.

c) Chứng minh rằng có duy nhất bộ số thực (x; y; z) thỏa mãn điều kiện :

$$\sqrt{x-2008}+\sqrt{y-2009}+\sqrt{z-2010}+3012 = \frac{1}{2}(x+y+z).$$

Câu 3. Cho góc xOy có số đo bằng 60^0. Đường tròn có tâm K nằm trong góc xOy tiếp xúc với tia Ox tại M và tiếp xúc với tia Oy tại N. Trên tia Ox lấy điểm P sao cho OP = 3OM. Tiếp tuyến của đường tròn (K) qua P cắt tia Oy tại Q khác O. Đường thẳng PK cắt đường thẳng MN ở E. Đường thẳng QK cắt đường thẳng MN ở F.

a) Chứng minh tam giác MPE đồng dạng với tam giác KPQ.

b) Chứng minh tứ giác PQEF nội tiếp được trong đường tròn.

c) Gọi D là trung điểm của đoạn PQ. Chứng minh tam giác DEF là một tam giác đều.

Câu 4. Tìm tất cả các cặp số nguyên (a; b) nghiệm đúng điều kiện :

$$(a-1)^2(a^2+9) = 4b^2 + 20b + 25.$$

Câu 5. Người ta gọi "Hình vuông (V) ngoại tiếp tứ giác lồi ABCD khi tứ giác ABCD nằm trong (V) và trên mỗi cạnh của (V) có chứa đúng một đỉnh của tứ giác ABCD" (Hình vẽ). Giả sử tứ giác lồi ABCD có hai hình vuông ngoại tiếp khác nhau. Chứng minh rằng tứ giác này có vô số hình vuông ngoại tiếp của nó.

BÀI GIẢI

Câu 1. $x^2 - mx - m - 1 = 0$ (1)

a) Phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 khi và chỉ khi :

$$\Delta > 0 \Leftrightarrow m^2 + 4m + 4 = (m+2)^2 \Leftrightarrow (m+2)^2 > 0 \Leftrightarrow m \neq -2.$$

b) Ta có : $x_1 + x_2 = m$; $x_1x_2 = -m - 1$

$$S = \frac{m^2+2m}{x_1^2+x_2^2} = \frac{m^2+2m}{x_1^2+x_2^2-2x_1x_2+2} = \frac{m^2+2m}{m^2+2m+4} = 1 - \frac{4}{(m+1)^2+3}$$

$$\geq 1 - \frac{4}{3} = -\frac{1}{3}$$

Vậy giá trị nhỏ nhất của S là $-\frac{1}{3}$ đạt được khi $m = -1$.

Câu 2.

a) Theo đề, phương trình $ax^2 + bx + c = 0$ (1) có hai nghiệm dương phân biệt nên :

$$\begin{cases} a \neq 0 \\ \Delta_1 = b^2 - 4ac > 0 \\ P_1 = x_1x_2 = \dfrac{c}{a} > 0 \\ S_1 = x_1 + x_2 = \dfrac{-b}{a} > 0 \end{cases}$$

Xét phương trình $cx^2 + bx + a = 0$ (2)

Từ trên, ta có : $c \neq 0$ và $\Delta_2 = b^2 - 4ac = \Delta_1 > 0$ nên phương trình (2) có hai nghiệm phân biệt x_3, x_4.

Ta có : $P_2 = x_3x_4 = \frac{a}{c} > 0$ (do $\frac{c}{a} > 0$); $S_2 = x_3 + x_4 = -\frac{b}{c}$

Mà $-\frac{b}{c} = -\frac{b}{a}.\frac{a}{c}$, vì $-\frac{b}{a} > 0$ và $\frac{a}{c} > 0 \Rightarrow S_2 > 0$

Vậy phương trình (2) có hai nghiệm dương phân biệt.

b) $\sqrt{\dfrac{2-x}{x+4}} - 2\sqrt{\dfrac{x+4}{2-x}} + 1 = 0$ (1)

Điều kiện $\begin{cases} x \neq -4 \\ \dfrac{2-x}{x+4} \geq 0 \\ x \neq 2 \\ \dfrac{x+4}{2-x} \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow -4 < x < 2$

Đặt $t = \sqrt{\dfrac{2-x}{x+4}} > 0$ (2)

Phương trình (1) trở thành :

$$t - \frac{2}{t} + 1 = 0 \Leftrightarrow t^2 + t - 2 = 0 \Leftrightarrow (t-1)(t+2) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = 1 \\ t = -2 \text{ (loại)} \end{array}\right.$$

Thay t = 1 vào (2), ta được : $\sqrt{\dfrac{2-x}{x+4}} = 1 \Leftrightarrow x = -1$

Vậy nghiệm của phương trình (1) là $x = -1$.

c) $\sqrt{x-2008} + \sqrt{y-2009} + \sqrt{z-2010} + 3012 = \frac{1}{2}(x+y+z)$ (*)

Điều kiện : $\begin{cases} x \geq 2008 \\ y \geq 2009 \\ z \geq 2010 \end{cases}$

$$(*) \Leftrightarrow (x-2008) - 2\sqrt{x-2008} + 1 + (y-2009) - 2\sqrt{y-2009} + 1 + (z-2010) - 2\sqrt{z-2010} + 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow \left(\sqrt{x-2008} - 1\right)^2 + \left(\sqrt{y-2009} - 1\right)^2 + \left(\sqrt{z-2010} - 1\right)^2 = 0 \quad (**)$$

(**) chỉ xảy ra trong trường hợp $\begin{cases} x - 2008 = 1 \\ y - 2009 = 1 \\ z - 2010 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2009 \\ y = 2010 \\ z = 2011 \end{cases}$.

Câu 3.

a) Do PK là phân giác của $\widehat{QPO}$ nên :

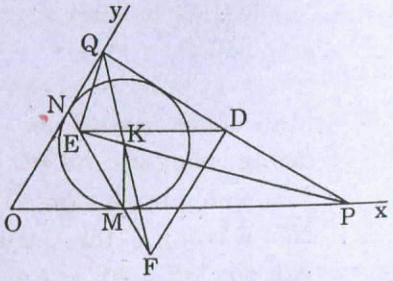
$\widehat{MPE} = \widehat{KPQ}$ (1)

Tam giác OMN là tam giác đều nên :

$\widehat{EMP} = 120^0$

QK là phân giác của $\widehat{OQP}$ nên :

$\widehat{QKP} = 180^0 - \left(\widehat{KQP} + \widehat{KPQ}\right)$



Mà $2\widehat{KQP} + 2\widehat{KPQ} = 180^0 - 60^0 = 120^0 \Rightarrow \widehat{QKP} = 120^0$

Suy ra : $\widehat{EMP} = \widehat{QKP}$ (2)

Từ (1) và (2), ta được : $\Delta MPE \backsim \Delta KPQ$.

b) $\Delta MPE \backsim \Delta KPQ \Rightarrow \widehat{MEP} = \widehat{KQP} \Leftrightarrow \widehat{FEP} = \widehat{FQP}$

Suy ra tứ giác PQEF nội tiếp được trong đường tròn.

c) Gọi D là trung điểm của PQ.

Chứng minh tam giác DEF là một tam giác đều.

$$\Delta MPE \backsim \Delta KPQ \Rightarrow \frac{PM}{PK} = \frac{PE}{PQ} \Rightarrow \frac{PM}{PE} = \frac{PK}{PQ}$$

Mặt khác : $\widehat{MPK} = \widehat{EPQ} \Rightarrow \Delta MPK \backsim \Delta EPQ \Rightarrow \widehat{PEQ} = \widehat{PMK} = 90^0$

Do đó D là tâm của đường tròn ngoại tiếp tứ giác PQEF.

Suy ra tam giác DEF cân tại D.

Ta có : $\widehat{FDP} = 2\widehat{FQD} = \widehat{OQP}$; $\widehat{EDQ} = 2\widehat{EPD} = \widehat{OPQ}$

$$\widehat{FDE} = 180^0 - \left(\widehat{FDP} + \widehat{EDQ}\right) = \widehat{POQ} = 60^0$$

Suy ra tam giác DEF là tam giác đều.

Câu 4. $(a-1)^2(a^2+9) = 4b^2 + 20b + 25 \Leftrightarrow (a-1)^2(a^2+9) = (2b+5)^2$

$\Leftrightarrow a^2 + 9$ là số chính phương

Do $|a|^2 < a^2 + 9 \le (|a| + 3)^2$ nên xảy ra các trường hợp sau :

- Trường hợp 1 : $a^2 + 9 = (|a| + 3)^2 \Leftrightarrow a = 0 \Rightarrow 9 = (2b+5)^2$

  $\Leftrightarrow b = -1; b = -4$

- Trường hợp 2 : $a^2 + 9 = (|a| + 2)^2 \Leftrightarrow 5 = 4|a|$. Không có số nguyên a nào thỏa.
- Trường hợp 3 : $a^2 + 9 = (|a| + 1)^2 \Leftrightarrow |a| = 4 \Leftrightarrow a = 4; a = -4$

  Với a = 4, ta có : $9.25 = (2b+5)^2 \Leftrightarrow b = 5; b = -10$

  Với a = –4, ta có : $25.25 = (2b+5)^2 \Leftrightarrow b = 10; b = -15$

  Vậy các cặp số nguyên thỏa mãn là :

  (a; b) = (0; –1), (0; –4), (4; 5), (4; –10), (–4; –15), (–4; 10).

Câu 5. Giả sử tứ giác lồi ABCD có hai hình vuông ngoại tiếp khác nhau.

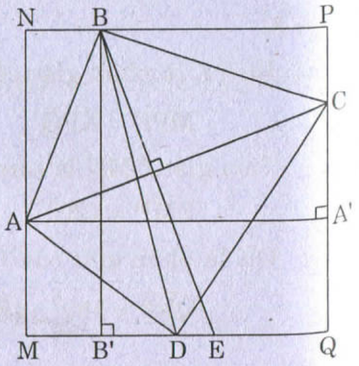
Xét MNPQ là hình vuông ngoại tiếp tứ giác ABCD.

Gọi A' là hình chiếu của A lên PQ, B' là hình chiếu của B lên MQ. Từ B kẻ đường vuông góc với AC cắt MQ tại E.

Cần chứng minh rằng : BE = AC.

- Nếu E trùng B' thì A' trùng với C.

  Khi đó : BE = BB' = AA' = AC



- Nếu E khác B' ta có : BB' = AA'; $\widehat{B'BE} = \widehat{A'AC}$

  Suy ra : $\Delta B'BE = \Delta A'AC \Rightarrow BE = AC$

  Xét hai hình vuông $M_1N_1P_1Q_1$ và $M_2N_2P_2Q_2$ cùng ngoại tiếp tứ giác ABCD.

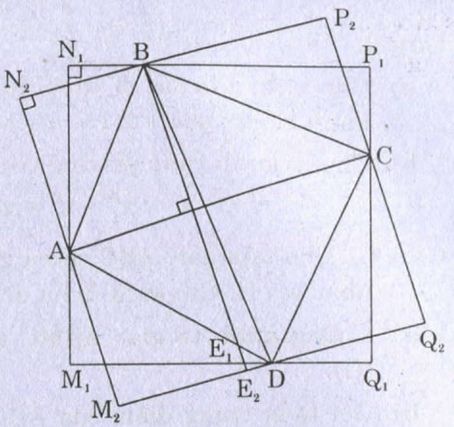
  Từ B kẻ đường vuông góc với AC cắt M_1Q_1 tại E_1 và cắt M_2Q_2 tại E_2.

  Theo chứng minh trên, ta có :

  $BE_1 = AC$ và $BE_2 = AC$.

  Suy ra E_1 và E_2 trùng nhau tại D.

  Vậy tứ giác ABCD có hai đường chéo AC và BD bằng nhau và vuông góc nhau.



Cuối cùng, cho tứ giác lồi ABCD có hai đường chéo AC và BD bằng nhau và vuông góc nhau. Dựng đường thẳng (d) tùy ý sao cho tứ giác ABCD và (d) chỉ có một điểm chung là A. Qua C dựng đường thẳng song song với (d). Qua B và D dựng các đường thẳng vuông góc với (d). Ta có hình chữ nhật MNPQ ngoại tiếp tứ giác ABCD.

Gọi A' là hình chiếu của A lên PQ, B' là hình chiếu của B lên MQ.

Ta có : AA' = BB' (tính chất hai đường chéo AC, BD bằng nhau và vuông góc với nhau).

Do đó hình chữ nhật MNPQ là hình vuông.

Vậy có vô số hình vuông ngoại tiếp tứ giác ABCD.

ĐỀ 66

ĐỀ THI TUYỂN SINH VÀO LỚP 10 THPT CHUYÊN LÊ QUÝ ĐÔN, NHA TRANG NĂM HỌC 2009 – 2010

Câu 1.

a) Rút gọn biểu thức : $A = \dfrac{\sqrt{3} - 1}{1 + \sqrt{1 + \dfrac{\sqrt{3}}{2}}} + \dfrac{\sqrt{3} + 1}{1 - \sqrt{1 - \dfrac{\sqrt{3}}{2}}}$.

b) Tìm hai số a và b sao cho $5a^2 + 5b^2 - 8ab + 2a + 2b + 2 = 0$.

Câu 2.

a) Cho phương trình $x^2 + (2m-1)x + m^2 = 0$ (m là tham số). Tìm số nguyên m lớn nhất để phương trình có hai nghiệm x_1, x_2 sao cho $\dfrac{(x_1 - x_2)^2 + 7}{x_1 + x_2 + 1}$ là một số nguyên.

b) Giải hệ phương trình : $\begin{cases}(x-y)(x^2-y^2)=3\\(x+y)(x^2+y^2)=15\end{cases}$

Câu 3.

a) Cho a, b, c là ba số thực thỏa mãn điều kiện $a^2+b^2+c^2=1$. Chứng minh rằng : $abc+2(1+a+b+c+ab+bc+ca)\ge 0$.

b) Chứng minh rằng phương trình sau không có nghiệm nguyên :

$$x_1^4+x_2^4+x_3^4+\ldots+x_8^4=2009.$$

Câu 4. Cho tam giác ABC có ba góc nhọn. Vẽ ba đường cao AD, BE, CF cắt nhau tại H. Gọi M là điểm đối xứng của H qua BC.

a) Chứng minh tứ giác ABMC nội tiếp đường tròn (gọi đường tròn đó là (O)).

b) Gọi Q là trung điểm của AB. Chứng minh EQ tiếp xúc với đường tròn ngoại tiếp ΔEHC.

c) Biết BE cắt (O) tại điểm thứ hai là N và CF cắt (O) tại điểm thứ hai là P. Tính giá trị biểu thức $T=\dfrac{AM}{AD}+\dfrac{BN}{BE}+\dfrac{CP}{CF}$.

Câu 5. Trong mặt phẳng, cho tam giác ABC và một điểm M sao cho AM = 1, $BM=CM=\sqrt{21}$. Chứng minh rằng : $S_{ABC}\le 8\sqrt{3}$.

BÀI GIẢI

Câu 1.

a) Ta có : $1+\dfrac{\sqrt3}{2}=\dfrac14+\dfrac34+2\dfrac{\sqrt3}{2}.\dfrac12=\left(\dfrac{\sqrt3}{2}+\dfrac12\right)^2$; $1-\dfrac{\sqrt3}{2}=\left(\dfrac{\sqrt3}{2}-\dfrac12\right)^2$

Do đó : $A=\dfrac{\sqrt3-1}{1+\sqrt{1+\dfrac{\sqrt3}{2}}}+\dfrac{\sqrt3+1}{1-\sqrt{1-\dfrac{\sqrt3}{2}}}=\dfrac{\sqrt3-1}{\dfrac32+\dfrac{\sqrt3}{2}}+\dfrac{\sqrt3+1}{\dfrac32-\dfrac{\sqrt3}{2}}$

$$=\frac{2\left(\sqrt3-1\right)}{3+\sqrt3}+\frac{2\left(\sqrt3+1\right)}{3-\sqrt3}=\frac{8\sqrt3}{3}.$$

b) $5a^2+5b^2-8ab+2a+2b+2=0$

$\Leftrightarrow (a^2+2a+1)+(b^2+2b+1)+(4a^2-8ab+4b^2)=0$

$\Leftrightarrow (a+1)^2+(b+1)^2+4(a-b)^2=0$

$\Leftrightarrow \begin{cases}(a+1)^2=0\\(b+1)^2=0\\(a-b)^2=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a+1=0\\b+1=0\\a=b\end{cases}\Leftrightarrow a=b=-1.$

Câu 2.

a) $x^2+(2m-1)x+m^2=0$

Phương trình có hai nghiệm x_1, x_2 khi và chỉ khi :

$$\Delta=(2m-1)^2-4m^2=-4m+1\ge 0\Leftrightarrow m\le\frac14 \qquad (1)$$

Ta có : $x_1+x_2=1-2m$; $x_1x_2=m^2$

Do đó : $\dfrac{(x_1-x_2)^2+7}{x_1+x_2+1}=\dfrac{(x_1+x_2)^2-4x_1x_2+7}{x_1+x_2+1}=\dfrac{(1-2m)^2-4m^2+7}{1-2m+1}$

$$=\frac{8-4m}{2-2m}=2+\frac{2}{1-m}$$

$$\frac{(x_1-x_2)^2+7}{x_1+x_2+1}\in\mathbb{Z}\Leftrightarrow\frac{2}{1-m}\in\mathbb{Z}\Leftrightarrow m\in\{-1;0;2;3\}$$

Kết hợp với (1), ta được m = 0.

b) $\begin{cases}(x-y)(x^2-y^2)=3\\(x+y)(x^2+y^2)=15\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}(x+y)(x-y)^2=3\\(x+y)(x^2+y^2)=15\end{cases}$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}(x+y)[(x+y)^2-4xy]=3\\(x+y)[(x+y)^2-2xy]=15\end{cases}$$

Đặt S = x + y, P = xy. Hệ trên trở thành :

$$\begin{cases}S(S^2-4P)=3\\S(S^2-2P)=15\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}SP=6\\S^3-2SP=15\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}S=3\\P=2\end{cases}$$

Do đó x, y là nghiệm của phương trình bậc hai $t^2-3t+2=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}t=1\\t=2\end{array}\right.$

Hệ có hai nghiệm là : (2; 1), (1; 2).

Câu 3.

a) Ta có : $a^2+b^2+c^2=1\Rightarrow |a|,\ |b|,\ |c|\le 1$

$\Rightarrow (1+a)(1+b)(1+c)\ge 0\Leftrightarrow 1+a+b+c+ab+bc+ac+abc\ge 0$ (1)

Mặt khác : $(1+a+b+c)^2\ge 0$

$\Rightarrow 1+a^2+b^2+c^2+2a+2b+2c+2ab+2bc+2ac\ge 0$

$\Leftrightarrow 1+a+b+c+ab+bc+ac\ge 0$ (vì $a^2+b^2+c^2=1$) (2)

Từ (1) và (2), ta được : $abc+2(1+a+b+c+ab+bc+ca)\ge 0$ (đpcm).

b) Nếu tất cả x_i chẵn thì x_i^4 chẵn nên $x_1^4+x_2^4+x_3^4+\ldots+x_8^4$ chẵn, nên không thể bằng 2009.

Nếu x_k chẵn, $x_k=2m_k$ ($m_k\in\mathbb{Z}$) $\Rightarrow x_k^4=16m_k^4 \,\vdots\, 16$

Nếu x_k lẻ, $x_k=2m_k+1$ ($m_k\in\mathbb{Z}$) $\Rightarrow x_k^4=16m_k^4+32_k^3+8m_k(3m_k+1)+1$

- Nếu m_k chẵn thì $8m_k(3m_k+1)\,\vdots\,16$
- Nếu m_k lẻ thì $3m_k+1$ chẵn $\Rightarrow 8m_k(3m_k+1)\,\vdots\,16$

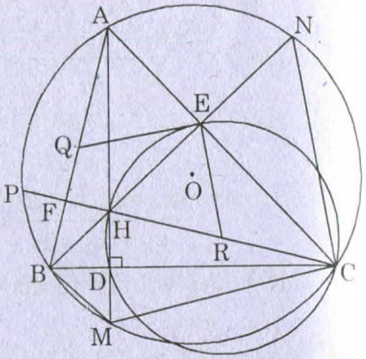
$\Rightarrow x_k^4$ chia cho 16 có số dư bằng 0 hoặc bằng 1.

Vì vậy $x_1^4 + x_2^4 + x_3^4 + ... + x_8^4$ chia cho 16 có số dư tối đa bằng 8.

Mặt khác : 2009 = 125.16 + 9 khi chia cho 16 có số dư là 9.

Vậy không thể xảy ra $x_1^4 + x_2^4 + x_3^4 + ... + x_8^4 = 2009$ với $x_i \in \mathbb{Z}$.

Câu 4.



a) Ta có : $\widehat{AEH} + \widehat{AFH} = 90^0 + 90^0 = 180^0$

$\Rightarrow \widehat{FAE} + \widehat{FHE} = 180^0$

Mà $\widehat{BHC} = \widehat{FHE}$ (góc đối đỉnh)

Do M và H đối xứng nhau qua BC nên :

$\widehat{BMC} = \widehat{BHC}$

$\Rightarrow \widehat{FAE} + \widehat{BMC} = 180^0$

Vậy tứ giác ABMC nội tiếp.

b) Gọi R là trung điểm của HC.

Ta có : $RE = RH = RC = \frac{HC}{2}$ (tính chất đường trung tuyến)

Do đó R là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác EHC.

$\widehat{REC} = \widehat{RCE}$ (ΔRCE cân tại R)

$QE = QA = QB = \frac{AB}{2}$ (tính chất đường trung tuyến)

Do đó : $\widehat{QAE} = \widehat{QEA}$ (ΔQAE cân tại Q)

Mặt khác : $\widehat{QAE} + \widehat{RCE} = 90^0 \Rightarrow \widehat{QEA} + \widehat{REC} = 90^0 \Rightarrow \widehat{QER} = 90^0$

$\Rightarrow QE \perp ER$ tại E và $E \in (R)$. EQ tiếp xúc với đường tròn ngoại tiếp tam giác EHC.

c) Ta có : $\widehat{NCA} = \widehat{NBA}$ (góc nội tiếp cùng chắn cung AN)

$\widehat{ACP} = \widehat{NBA}$ (cùng phụ với $\widehat{BAC}$)

$\Rightarrow \widehat{NCA} = \widehat{ACP}$

ΔNCH có CE vừa là đường cao vừa là đường phân giác nên ΔNCH cân tại C.

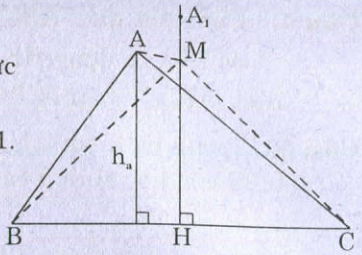
Do đó AC là trung trực của HN, suy ra EH = EN.

Tương tự, ta có : FH = FP

$$\text{Do đó : } T = \frac{AM}{AD} + \frac{BN}{BE} + \frac{CP}{CF} = \frac{AD + DM}{AD} + \frac{BE + EN}{BE} + \frac{CF + FP}{CF}$$

$$= 3 + \frac{DM}{AD} + \frac{EN}{BE} + \frac{FP}{CF} = 3 + \frac{DH}{AD} + \frac{EH}{BE} + \frac{FH}{CF}$$

$$= 3 + \frac{S_{BCH} + S_{ACH} + S_{ABH}}{S_{ABC}} = 3 + \frac{S_{ABC}}{S_{ABC}} = 4.$$



Câu 5. Gọi H là trung điểm của BC.

Do BM = CM nên M thuộc đường trung trực của BC nên MH ⊥ BC

Lấy A_1 trên tia đối của MH sao cho $MA_1 = 1$.

Ta có : $h_a \le AM + MH = A_1M + MH = A_1H$

Đặt MH = x (x > 0), ta có :

$$S_{ABC} = \frac{1}{2}BC.h_a \le \frac{1}{2}BC.A_1H = BH.A_1H = S_{A_1BC}$$

Mặt khác : $BH = \sqrt{BM^2 - MH^2} = \sqrt{21 - x^2}$; $A_1H = x + 1$

$$\Rightarrow BH.A_1H = (x+1)\sqrt{21 - x^2} \Rightarrow (S_{A_1BC})^2 = (x+1)^2(21 - x^2)$$

Ta chứng minh $(S_{A_1BC})^2 \le 192 \Leftrightarrow -x^4 - 2x^3 + 20x^2 + 42x + 21 \le 192$

$\Leftrightarrow (x-3)^2(x^2 + 8x + 19) \ge 0$ luôn đúng $\forall x$

Dấu "=" xảy ra khi MH = 3.

ĐỀ 67

ĐỀ THI TUYỂN SINH VÀO LỚP 10 PTNK ĐHQG TP. HCM NĂM HỌC 2009 – 2010

Câu 1.

a) Giải phương trình sau bằng cách đặt ẩn số $t = \left(\frac{5}{x} - \frac{x}{4}\right)$:

$$x^2 + \frac{400}{x^2} = 35 + 24\left(\frac{5}{x} - \frac{x}{4}\right)$$

b) Cho phương trình $mx^2 + 3(m+1)x - 2m + 3 = 0$. Tìm m để phương trình đã cho có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 thỏa mãn $x_1^2 + x_2^2 = 34$.

Câu 2. Xét biểu thức : $R = \frac{\sqrt{x} + 2}{\sqrt{x} + 1} - \frac{\sqrt{x} + 3}{5 - \sqrt{x}} - \frac{3x + 4\sqrt{x} - 5}{x - 4\sqrt{x} - 5}$.

a) Rút gọn R.

b) Tìm số thực x để R > –2. Tìm số tự nhiên x là số chính phương sao cho R là số nguyên.

Câu 3.

a) Giải hệ phương trình : $\begin{cases} x + xy + y = 0 \\ x^2 + y^2 = 8 \end{cases}$

b) Cho a, b, c là độ dài ba cạnh của tam giác ABC. Giả sử phương trình $(x - a)(x - b) + (x - b)(x - c) + (x - c)(x - a) = 0$ có nghiệm kép. Tính số đo các góc của tam giác ABC.

Câu 4. Cho tam giác ABC, có $\widehat{ABC} = 60^0$, $\widehat{ACB} = 45^0$. Dựng AH ⊥ BC (H thuộc BC) và dựng HK ⊥ AB (K thuộc AB). Gọi M là trung điểm của AC. Biết $AH = \sqrt{3}$, tính BC. Chứng minh BKMC là tứ giác nội tiếp.

Câu 5. Trong kỳ kiểm tra môn Toán một lớp gồm 3 tổ A, B và C, điểm trung bình của học sinh ở các tổ được thống kê ở bảng sau :

Tổ	A	B	C	A và B	B và C
Điểm trung bình	9,0	8,8	7,8	8,9	8,2

Biết tổ A gồm 10 học sinh, hãy xác định số học sinh và điểm trung bình của toàn lớp.

Câu 6. Cho tứ giác lồi ABCD nội tiếp đường tròn (O), có đỉnh A cố định và các đỉnh B, C, D di chuyển trên (O) sao cho $\widehat{BAD} > 90^0$. Kẻ tia Ax vuông góc với AD cắt BC tại E, kẻ tia Ay vuông góc với AB cắt CD tại F. Gọi K là điểm đối xứng của A qua EF. Chứng minh tứ giác EFKC nội tiếp được và đường thẳng EF luôn đi qua một điểm cố định.

BÀI GIẢI

Câu 1.

a) $x^2 + \dfrac{400}{x^2} = 35 + 24\left(\dfrac{5}{x} - \dfrac{x}{4}\right)$

Đặt $t = \left(\dfrac{5}{x} - \dfrac{x}{4}\right) \Rightarrow t^2 + \dfrac{5}{2} = \dfrac{25}{x^2} + \dfrac{x^2}{16} \Rightarrow x^2 + \dfrac{400}{x^2} = 16\left(t^2 + \dfrac{5}{2}\right)$

Phương trình đã cho trở thành : $16t^2 - 24t + 5 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = \dfrac{5}{4} \\ t = \dfrac{1}{4} \end{array}\right.$

– Với $t = \dfrac{5}{4}$, ta có : $\dfrac{5}{x} - \dfrac{x}{4} = \dfrac{5}{4} \Leftrightarrow x_1 = \dfrac{-5 + \sqrt{105}}{2}$; $x_2 = \dfrac{-5 - \sqrt{105}}{2}$

– Với $t = \dfrac{1}{4}$, ta có : $\dfrac{5}{x} - \dfrac{x}{4} = \dfrac{1}{4} \Leftrightarrow x_3 = -5$; $x_4 = 4$

Vậy phương trình đã cho có nghiệm là : –5; 4; $\dfrac{-5 + \sqrt{105}}{2}$; $\dfrac{-5 - \sqrt{105}}{2}$.

b) $mx^2 + 3(m + 1)x - 2m + 3 = 0$ (1)

Để phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt thì

$$\begin{cases} m \neq 0 \\ \Delta > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 0 \\ 9(m + 1)^2 - 4m(-2m + 3) > 0 \end{cases} \Leftrightarrow m \neq 0$$

Ta có : $x_1 + x_2 = \dfrac{-3(m + 1)}{m}$; $x_1x_2 = \dfrac{-2m + 3}{m}$

Do đó : $x_1^2 + x_2^2 = 34 \Leftrightarrow (x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2 = 34$

$$\Leftrightarrow \frac{13m^2 + 12m + 9}{m^2} = 34 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m = 1 \\ m = -\dfrac{3}{7} \end{array}\right.$$

Vậy giá trị m cần tìm là 1; $-\dfrac{3}{7}$.

Câu 2.

a) Đặt $t = \sqrt{x}$.

Ta có : $R = \dfrac{t + 2}{t + 1} - \dfrac{t + 3}{5 - t} - \dfrac{3t^2 + 4t - 5}{t^2 - 4t - 5}$

$= \dfrac{(t + 2)(t - 5) + (t + 3)(t + 1) - (3t^2 + 4t - 5)}{(t + 1)(t - 5)}$

$= \dfrac{-t^2 - 3t - 2}{(t + 1)(t - 5)} = -\dfrac{(t + 1)(t + 2)}{(t + 1)(t - 5)} = -\dfrac{t + 2}{t - 5} = -\dfrac{\sqrt{x} + 2}{\sqrt{x} - 5}$

Vậy $R = -\dfrac{\sqrt{x} + 2}{\sqrt{x} - 5}$.

b) Điều kiện $x \geq 0$.

Ta có : $R > -2 \Leftrightarrow -\dfrac{t + 2}{t - 5} > -2 \Leftrightarrow 2 - \dfrac{t + 2}{t - 5} > 0 \Leftrightarrow \dfrac{t - 12}{t - 5} > 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t < 5 \\ t > 12 \end{array}\right.$

– Với $t < 5 \Leftrightarrow \sqrt{x} < 5 \Leftrightarrow 0 \leq x < 25$

– Với $t > 12 \Leftrightarrow \sqrt{x} > 12 \Leftrightarrow x > 144$

Vậy giá trị x cần tìm là $0 \leq x < 25$ hoặc $x > 144$.

Ta có x là số chính phương nên $t = \sqrt{x} \in \mathbb{N}$

Khi đó $R = -\dfrac{t + 2}{t - 5} = -1 - \dfrac{7}{t - 5} \in \mathbb{Z} \Rightarrow t - 5$ là ước của 7.

Mặt khác $t - 5 \geq -5 \Rightarrow t - 5 = -1, 1, 7$.

Suy ra các giá trị x cần tìm là x = 16, 36, 144.

Câu 3.

a) $\begin{cases} x + xy + y = 0 \\ x^2 + y^2 = 8 \end{cases}$

Đặt S = x + y, P = xy; khi đó hệ đã cho trở thành :

$$\begin{cases} S + P = 0 \\ S^2 - 2P = 8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} P = -S \\ S^2 + 2S - 8 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} S = -4 \\ P = 4 \end{cases} \\ \begin{cases} S = 2 \\ P = -2 \end{cases} \end{array}\right.$$

Với $\begin{cases} S = -4 \\ P = 4 \end{cases}$, ta được $\begin{cases} x + y = -4 \\ xy = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -2 \\ y = -2 \end{cases}$

Với $\begin{cases} S = 2 \\ P = -2 \end{cases}$, ta được $\begin{cases} x + y = 2 \\ xy = -2 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x = 1 - \sqrt{3} \\ y = 1 + \sqrt{3} \end{cases} \\ \begin{cases} x = 1 + \sqrt{3} \\ y = 1 - \sqrt{3} \end{cases} \end{array}\right.$.

Vậy hệ phương trình đã cho có nghiệm (x; y) là :

$$(-2; 2),\ (1 + \sqrt{3};\ 1 - \sqrt{3}),\ (1 - \sqrt{3};\ 1 + \sqrt{3}).$$

b) $(x - a)(x - b) + (x - b)(x - c) + (x - c)(x - a) = 0$

$\Leftrightarrow 3x^2 - 2(a + b + c)x + (ab + bc + ac) = 0$ (1)

Phương trình (1) có nghiệm kép khi và chỉ khi :

$$\Delta' = (a + b + c)^2 - 3(ab + ac + bc) = a^2 + b^2 + c^2 - ab - ac - bc = 0$$

$\Leftrightarrow a - b = b - c = c - a = 0$

Do đó tam giác ABC là tam giác đều, suy ra : $\hat{A} = \hat{B} = \hat{C} = 60^0$.

Câu 4.

a) Trong tam giác vuông ABH, ta có :

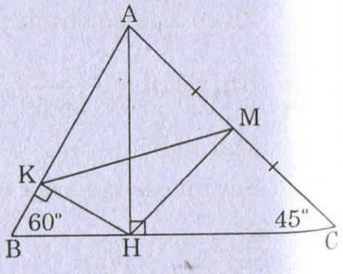
$$\tan\widehat{ABH} = \frac{AH}{BH} \Rightarrow BH = \frac{AH}{\tan\widehat{ABH}} = \frac{\sqrt{3}}{\tan 60^0} = 1$$

Trong tam giác vuông AHC, ta có : $\widehat{ACH} = 45^0 \Rightarrow \widehat{HAC} = 45^0$

Do đó tam giác AHC là tam giác vuông cân tại H, suy ra $HC = HA = \sqrt{3}$

Suy ra : $BC = BH + CH = 1 + \sqrt{3}$ (đvdd).

b) Tam giác AHC vuông cân, có AM là trung tuyến nên cũng là đường cao hay $AM \perp HM$.



Ta có : $\widehat{AKH} + \widehat{AMH} = 90^0 + 90^0 = 180^0$

Do đó tứ giác AKHM là tứ giác nội tiếp.

Suy ra : $\widehat{AKM} = \widehat{AHM} = 90^0 - \widehat{HAM} = 45^0$

Ta có : $\widehat{AKM} = \widehat{BCM} = 45^0$

Do đó tứ giác BKMC là tứ giác nội tiếp.

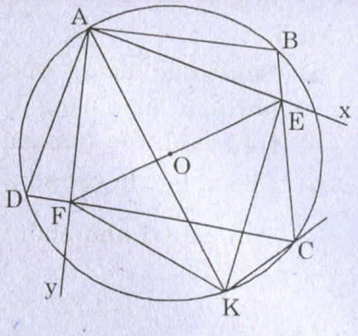
Câu 5. Gọi x, y lần lượt là số học sinh tổ B và C (x > 0, y > 0)

Ta có : $\dfrac{9.10 + 8{,}8.x}{10 + x} = 8{,}9 \Rightarrow x = 10$

Tương tự : $\dfrac{8{,}8.x + 7{,}8.y}{x + y} = 8{,}2 \Rightarrow x = 10,\ y = 15$

Vậy điểm trung bình của là $\dfrac{9.10 + 8{,}8.10 + 7{,}8.15}{10 + 10 + 15} = 8{,}43$.

Câu 6. Tứ giác ABCD nội tiếp nên $\widehat{BAD} + \widehat{BCD} = 180^0$



và $\widehat{BAD} + \widehat{EAF} = \widehat{BAE} + \widehat{EAF} + \widehat{FAD} + \widehat{EAF}$

$= \widehat{BAF} + \widehat{DAE}$

$= 90^0 + 90^0 = 180^0$

$\Rightarrow \widehat{BCD} = \widehat{EAF}$ (1)

Do A và K đối xứng nhau qua EF nên :

$\widehat{EKF} = \widehat{EAF}$ (2)

Từ (1) và (2), suy ra : $\widehat{EKF} = \widehat{ECF}$.

Do đó tứ giác EFKC nội tiếp.

Vì tứ giác EFKC nội tiếp nên ta có $\widehat{FCK} = \widehat{FEK}$

Mặt khác : $\widehat{FEK} = \widehat{FEA}$ (tính chất đối xứng)

$\widehat{FEA} = \widehat{KAD}$ (cùng phụ với $\widehat{KAE}$)

Suy ra : $\widehat{KAD} = \widehat{FCK}$

Do đó tứ giác ADKC nội tiếp, suy ra K thuộc (O) $\Rightarrow$ OA = OK $\Rightarrow$ O thuộc đường trung trực của AK.

Mà EF là đường trung trực của AK nên O thuộc EF.

Vậy đường thẳng EF luôn đi qua điểm O cố định.

ĐỀ 68

ĐỀ THI TUYỂN SINH VÀO LỚP 10 THPT CHUYÊN PHAN BỘI CHÂU, NGHỆ AN NĂM HỌC 2009 – 2010

Câu 1.

a) Giải phương trình $\sqrt[3]{x + 2} + \sqrt[3]{7 - x} = 3$.

b) Giải hệ phương trình $\begin{cases} 2 + 3x = \dfrac{8}{y^3} \\ x^3 - 2 = \dfrac{6}{y} \end{cases}$

Câu 2. Tìm số thực a để phương trình sau có nghiệm nguyên :

$$x^2 - ax + a + 2 = 0.$$

Câu 3. Cho tam giác ABC vuông tại A có đường phân giác trong BE (E thuộc AC). Đường tròn đường kính AB cắt BE, BC lần lượt tại M, N (khác B). Đường thẳng AM cắt BC tại K. Chứng minh AE.AN = AM.AK.

Câu 4. Cho tam giác ABC có 3 góc nhọn, trung tuyến AO có độ dài bằng độ dài cạnh BC. Đường tròn đường kính BC cắt các cạnh AB, AC thứ tự tại M, N (M khác B, N khác C). Đường tròn ngoại tiếp tam giác AMN và đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC cắt đường thẳng AO lần lượt tại I và K. Chứng minh tứ giác BOIM nội tiếp được một đường tròn và tứ giác BICK là hình bình hành.

Câu 5.

a) Bên trong đường tròn tâm O bán kính 1 cho tam giác ABC có diện tích lớn hơn hoặc bằng 1. Chứng minh rằng điểm O nằm trong hoặc nằm trên cạnh của tam giác ABC.

b) Cho a, b, c là các số thực dương thay đổi thỏa mãn : a + b + c = 3.

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = a^2 + b^2 + c^2 + \dfrac{ab + bc + ca}{a^2b + b^2c + c^2a}$.

BÀI GIẢI

Câu 1.

a) $\sqrt[3]{x+2} + \sqrt[3]{7-x} = 3$

$\Leftrightarrow x + 2 + 7 - x + 3\sqrt[3]{x+2}.\sqrt[3]{7-x}\left(\sqrt[3]{x+2} + \sqrt[3]{7-x}\right) = 27$

$\Leftrightarrow 9 + 9\sqrt[3]{(x+2)(7-x)} = 27 \Leftrightarrow \sqrt[3]{(x+2)(7-x)} = 2$

$\Leftrightarrow (x+2)(7-x) = 8 \Leftrightarrow x^2 - 5x - 6 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -1 \\ x = 6 \end{array}\right.$

b) $\begin{cases} 2 + 3x = \dfrac{8}{y^3} \\ x^3 - 2 = \dfrac{6}{y} \end{cases}$

Đặt $z = \dfrac{2}{y}$, hệ trên trở thành $\begin{cases} 2 + 3x = z^3 \\ 2 + 3z = x^3 \end{cases}$

$\Rightarrow 3(x - z) = z^3 - x^3 \Leftrightarrow (x - z)(x^2 + xz + z^2 + 3) = 0$

$\Leftrightarrow x = z$ (vì $x^2 + xz + z^2 + 3 > 0; \forall x, z$ $\Rightarrow x^3 - 3x - 2 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -1 \\ x = 2 \end{array}\right.$

Vậy hệ đã cho có nghiệm (x; y) là : (–1; –2), (2; 1).

Câu 2. Để phương trình có nghiệm thì $\Delta \geq 0 \Leftrightarrow a^2 - 4a - 8 \geq 0$ (1)

Gọi x_1, x_2 là hai nghiệm nguyên của phương trình đã cho (giả sử $x_1 > x_2$).

Ta có : $x_1 + x_2 = a$; $x_1x_2 = a + 2$

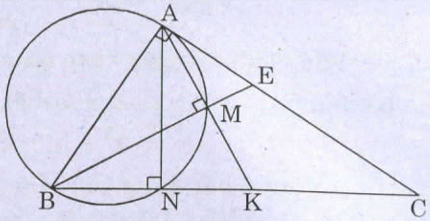
$\Rightarrow x_1x_2 - x_1 - x_2 = 2 \Leftrightarrow (x_1 - 1)(x_2 - 1) = 3$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x_1 - 1 = 3 \\ x_2 - 1 = 1 \end{cases} \\ \begin{cases} x_1 - 1 = -1 \\ x_2 - 1 = -3 \end{cases} \end{array}\right. \text{(vì } x_1 - 1 > x_2 - 1\text{)} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x_1 = 4 \\ x_2 = 2 \end{cases} \\ \begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = -2 \end{cases} \end{array}\right.$$

Suy ra a = 6 hoặc a = – 2 (thỏa mãn (1))

Thử lại ta thấy a = 6, a = – 2 thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Câu 3. Vì BE là phân giác $\widehat{ABC}$ nên



$\widehat{ABM} = \widehat{MBC}$

$\Rightarrow \overset{\frown}{AM} = \overset{\frown}{MN} \Rightarrow \widehat{MAE} = \widehat{MAN}$ (1)

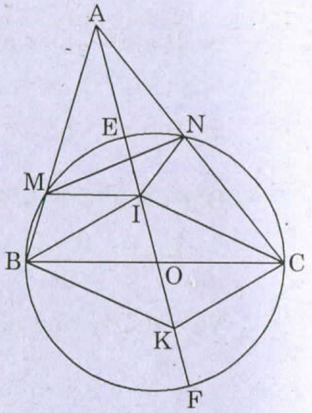
Vì M, N thuộc đường tròn đường kính AB nên $\widehat{AMB} = \widehat{ANB} = 90^0$

Suy ra : $\widehat{ANK} = \widehat{AME} = 90^0$ (2)

Từ (1) và (2), suy ra :

$\Delta AME \backsim \Delta ANK \Rightarrow \dfrac{AN}{AM} = \dfrac{AK}{AE} \Rightarrow AN.AE = AM.AK.$

Câu 4. Vì tứ giác AMIN nội tiếp nên $\widehat{ANM} = \widehat{AIM}$



Vì tứ giác BMNC nội tiếp nên

$\widehat{ANM} = \widehat{ABC} \Rightarrow \widehat{AIM} = \widehat{ABC}$

Suy ra tứ giác BOIM nội tiếp.

Từ chứng minh trên, suy ra :

$\Delta AMI \backsim \Delta AOB \Rightarrow \dfrac{AM}{AO} = \dfrac{AI}{AB}$

$\Rightarrow AI.AO = AM.AB$ (1)

Gọi E, F là giao điểm của đường thẳng AO với (O) (E nằm giữa A, O).

Tương tự, ta được :

$AM.AB = AE.AF = (AO - R)(AO + R) = AO^2 - R^2 = 3R^2$

$\Rightarrow AI.AO = 3R^2 \Rightarrow AI = \dfrac{3R^2}{AO} = \dfrac{3R^2}{2R} = \dfrac{3R}{2} \Rightarrow OI = \dfrac{R}{2}$ (2)

$\Delta AOB \backsim \Delta COK \Rightarrow OA.OK = OB.OC = R^2$

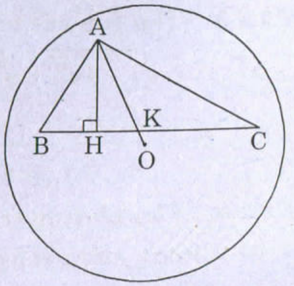
$\Rightarrow OK = \dfrac{R^2}{OA} = \dfrac{R^2}{2R} = \dfrac{R}{2}$ (3)

Từ (2) và (3), suy ra OI = OK

Hay O là trung điểm của IK.

Mà O là trung điểm của BC. Do đó BICK là hình bình hành.

Câu 5.



a) Giả sử O nằm ngoài miền tam giác ABC.

Không mất tính tổng quát, giả sử A và O nằm về hai phía của đường thẳng BC.

Suy ra đoạn AO cắt đường thẳng BC tại K.

Kẻ AH vuông góc với BC tại H.

Suy ra : $AH \leq AK < AO < 1 \Rightarrow AH < 1$

$$S_{ABC} = \frac{AH.BC}{2} < \frac{2.1}{2} = 1 \text{ (vô lí)}$$

Vậy O nằm trong hoặc nằm trên cạnh của tam giác ABC.

b) $3(a^2 + b^2 + c^2) = (a + b + c)(a^2 + b^2 + c^2)$

$$= a^3 + b^3 + c^3 + a^2b + b^2c + c^2a + ab^2 + bc^2 + ca^2$$

Áp dụng bất đẳng thức Cô-si, ta có :

$$a^3 + ab^2 \ge 2a^2b$$

$$b^3 + bc^2 \ge 2b^2c$$

$$c^3 + ca^2 \ge 2c^2a$$

$$\Rightarrow 3(a^2 + b^2 + c^2) \ge 3(ab^2 + b^2c + c^2a) > 0$$

$$\Rightarrow P \ge a^2 + b^2 + c^2 + \frac{ab + bc + ca}{a^2 + b^2 + c^2}$$

$$\Rightarrow P \ge a^2 + b^2 + c^2 + \frac{9 - (a^2 + b^2 + c^2)}{2(a^2 + b^2 + c^2)}$$

Đặt $t = a^2 + b^2 + c^2$, ta chứng minh được $t \ge 3$.

$$P \ge t + \frac{9 - t}{2t} = \frac{t}{2} + \frac{9}{2t} + \frac{t}{2} - \frac{1}{2} \ge 3 + \frac{3}{2} - \frac{1}{2} = 4 \Rightarrow P \ge 4$$

Vậy giá trị nhỏ nhất của P là 4 khi a = b = c = 1.

ĐỀ 69

ĐỀ THI TUYỂN SINH VÀO LỚP 10 THPT TP. HCM NĂM HỌC 2008 – 2009

Câu 1. Giải các phương trình và hệ phương trình sau :

a) $2x^2 + 3x - 5 = 0$ **b)** $x^4 - 3x^2 - 4 = 0$

c) $\begin{cases} 2x + y = 1 \\ 3x + 4y = -1 \end{cases}$

Câu 2.

a) Vẽ đồ thị (P) của hàm số $y = -x^2$ và đường thẳng (D) : $y = x - 2$ trên cùng một hệ trục tọa độ.

b) Tìm tọa độ giao điểm của (P) và (D) ở câu trên bằng phép tính.

Câu 3. Thu gọn các biểu thức sau :

a) $A = \sqrt{7 - 4\sqrt{3}} - \sqrt{7 + 4\sqrt{3}}$

b) $B = \left(\frac{\sqrt{x} + 1}{x - 4} - \frac{\sqrt{x} - 1}{x + 4\sqrt{x} + 4}\right)\cdot\frac{x\sqrt{x} + 2x - 4\sqrt{x} - 8}{\sqrt{x}}$ $(x > 0;\ x \ne 4)$.

Câu 4. Cho phương trình $x^2 - 2mx - 1 = 0$ (m là tham số)

a) Chứng minh rằng phương trình trên luôn có hai nghiệm phân biệt.

b) Gọi x_1, x_2 là hai nghiệm của phương trình trên. Tìm m để :

$$x_1^2 + x_2^2 - x_1x_2 = 7.$$

Câu 5. Từ điểm M nằm bên ngoài đường tròn (O) vẽ cát tuyến MCD không đi qua tâm O và hai tiếp tuyến MA, MB đến đường tròn (O), ở đây A, B là các tiếp điểm và C nằm giữa M, D.

a) Chứng minh $MA^2 = MC.MD$.

b) Gọi I là trung điểm của CD. Chứng minh rằng 5 điểm M, A, O, I, B nằm trên một đường tròn.

c) Gọi H là giao điểm của AB và MO. Chứng minh tứ giác CHOD nội tiếp được đường tròn. Suy ra AB là đường phân giác của $\widehat{CHD}$.

d) Gọi K là giao điểm của các tiếp tuyến tại C và D của đường tròn (O). Chứng minh A, B, K thẳng hàng

BÀI GIẢI

Câu 1.

a) Dễ thấy a + b + c = 2 + 3 – 5 = 0 nên phương trình đã cho có hai nghiệm là $x_1 = 1$; $x_2 = \frac{c}{a} = -\frac{5}{2}$.

b) Đặt $t = x^2$ $(t \ge 0)$ (1)

Phương trình đã cho trở thành : $t^2 - 3t - 4 = 0$ (2)

Phương trình (2) có a – b + c = 0 nên có hai nghiệm t = –1 (loại) hoặc $t = -\frac{c}{a} = 4$.

Thay vào (1), ta được : $x^2 = 4 \Rightarrow x = \pm 2$

Vậy phương trình đã cho có hai nghiệm : x = 2; x = –2.

c) $\begin{cases} 2x + y = 1 & (1) \\ 3x + 4y = -1 & (2) \end{cases}$

Từ phương trình (1), suy ra : y = 1 – 2x

Thay vào phương trình (2), ta được : $3x + 4(1 - 2x) = -1 \Rightarrow x = 1$.

Vậy hệ phương trình đã cho có nghiệm là : (1; –1).

Câu 2.

a) Đồ thị parabol (P) : $y = -x^2$ đi qua các điểm (0; 0), (1; –1), (–1; –1), (2; –4) và (–2; –4).

Đồ thị đường thẳng (D) : y = x – 2 đi qua hai điểm (0; –2) và (2; 0).

Bạn đọc tự vẽ hình.

b) Hoành độ giao điểm của (P) và (D) thỏa mãn phương trình :

$$-x^2 = x - 2 \Leftrightarrow x = \{1; -2\}$$

Ta được hai giao điểm của (P) và (D) là (1; –1) và (–2; –4).

Câu 3.

a) Ta có : $A = \sqrt{7-4\sqrt{3}} - \sqrt{7+4\sqrt{3}} = \sqrt{(2-\sqrt{3})^2} - \sqrt{(2+\sqrt{3})^2}$

$= \left|2-\sqrt{3}\right| - (2+\sqrt{3}) = 2-\sqrt{3}-2-\sqrt{3} = -2\sqrt{3}$.

b) Ta có : $B = \left(\dfrac{\sqrt{x}+1}{x-4} - \dfrac{\sqrt{x}-1}{x+4\sqrt{x}+4}\right) . \dfrac{x\sqrt{x}+2x-4\sqrt{x}-8}{\sqrt{x}}$

$= \dfrac{(\sqrt{x}+1)(\sqrt{x}+2)}{\sqrt{x}} - \dfrac{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}-2)}{\sqrt{x}} = \dfrac{6\sqrt{x}}{\sqrt{x}} = 6$.

Câu 4.

a) Vì $ac = -1$ nên phương trình đã cho luôn có hai nghiệm phân biệt.

b) Từ $x_1^2 + x_2^2 - x_1x_2 = 7 \Rightarrow (x_1+x_2)^2 - 3x_1x_2 = 7$ (1)

Theo định lí Vi-ét, ta có : $x_1 + x_2 = 2m; x_1x_2 = -1$

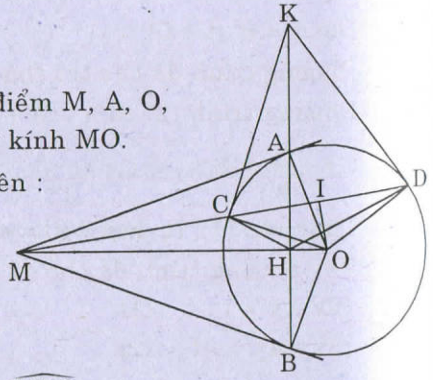
Thay vào (1), ta được : $4m^2 + 3 = 7 \Rightarrow m = \pm 1$.

Câu 5.

a) Vì MA là tiếp tuyến của đường tròn (O) nên :

$\widehat{MAC} = \widehat{MDA} \Rightarrow \Delta MAC \backsim \Delta MDA$ (g-g)

$\Rightarrow \dfrac{MA}{MD} = \dfrac{MC}{MA} \Rightarrow MA^2 = MC.MD$.



b) Vì $\widehat{MAO} = \widehat{MBO} = \widehat{MIO} = 90^0$ nên 5 điểm M, A, O, I, B cùng nằm trên đường tròn đường kính MO.

c) Vì ΔMAO vuông tại A và $AH \perp MO$ nên :

$MA^2 = MH.MO$

Theo câu a) thì $MA^2 = MC.MD$

$\Rightarrow \dfrac{MH}{MD} = \dfrac{MC}{MO}$

$\Rightarrow \Delta MHC \backsim \Delta MDO$ (c-g-c) $\Rightarrow \widehat{MHC} = \widehat{MDO}$

Vậy tứ giác CHOD là tứ giác nội tiếp đường tròn.

Suy ra : $\widehat{OCD} = \widehat{ODC}$ (do ΔOCD cân tại O) và $\widehat{ODC} = \widehat{MHC}$ (chứng minh trên) nên $\widehat{OHD} = \widehat{MHC}$

Do đó : $90^0 - \widehat{OHD} = 90^0 - \widehat{MHC} \Rightarrow \widehat{AHD} = \widehat{AHC}$

Vậy AB là đường phân giác của $\widehat{CHD}$.

d) Vì $\widehat{KCO} = \widehat{KDO} = 90^0$ nên tứ giác CHOD nội tiếp đường tròn đường kính KO.

Suy ra $\widehat{KHO} = 90^0$, hay $KH \perp MO$.

Mà $AB \perp MO$ tại H nên K, A, B thẳng hàng.

ĐỀ 70

ĐỀ THI TUYỂN SINH VÀO LỚP 10 THPT HÀ NỘI NĂM HỌC 2008 – 2009

Câu 1. Cho biểu thức : $P = \left(\dfrac{1}{\sqrt{x}} + \dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+1}\right) : \dfrac{\sqrt{x}}{x+\sqrt{x}}$

1. Rút gọn P.

2. Tìm giá trị của P khi x = 4.

3. Tìm x để $P = \dfrac{13}{3}$.

Câu 2. *Giải bài toán sau bằng cách lập phương trình :*

Tháng thứ nhất hai tổ sản xuất được 900 chi tiết máy. Tháng thứ hai tổ I vượt mức 15% và tổ II vượt mức 10% so với tháng thứ nhất. Vì vậy hai tổ đã sản xuất được 1010 chi tiết máy. Hỏi tháng thứ nhất mỗi tổ sản xuất được bao nhiêu chi tiết máy ?

Câu 3. Cho parabol (P) : $y = \dfrac{1}{4}x^2$ và đường thẳng (d) : $y = mx + 1$.

1. Chứng minh rằng đường thẳng (d) luôn cắt parabol (P) tại hai điểm phân biệt với mọi giá trị của m.

2. Gọi A, B là hai giao điểm của (d) và (P). Tính diện tích ΔOAB theo m (O là gốc tọa độ).

Câu 4. Cho đường tròn tâm O đường kính AB = 2R và E là điểm bất kì trên đường tròn đó (E khác A và B). Đường phân giác góc AEB cắt đoạn thẳng AB tại F và cắt đường tròn (O) tại điểm thứ hai K khác A.

1. Chứng minh rằng $\Delta KAF \backsim \Delta KEA$.

2. Gọi I là giao điểm của đường trung trực đoạn EF với OE. Chứng minh rằng đường tròn (I; IE) tiếp xúc với đường thẳng AB tại F.

3. Gọi M và N lần lượt là giao điểm thứ hai của AE, BE với đường tròn (I; IE). Chứng minh rằng MN // AB.

4. Gọi P là giao điểm của NF và AK; Q là giao điểm của MF và BK. Tìm giá trị nhỏ nhất của chu vi ΔKPQ theo R khi E chuyển động trên đường tròn (O).

Câu 5. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức :

$$A = (x-1)^4 + (x-3)^4 + 6(x-1)^2(x-3)^2.$$

BÀI GIẢI

Câu 1.

1. Điều kiện x > 0.

Ta có : $P = \left(\dfrac{1}{\sqrt{x}} + \dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+1}\right) : \dfrac{\sqrt{x}}{x+\sqrt{x}} = \left(\dfrac{\sqrt{x}+1+x}{\sqrt{x}(\sqrt{x}+1)}\right) : \dfrac{1}{\sqrt{x}+1} = \dfrac{x+\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}}$.

2. Khi x = 4 thì $P = \frac{4+\sqrt{4}+1}{\sqrt{4}} = \frac{7}{2}$.

3. Ta có : $P = \frac{13}{3} \Leftrightarrow \frac{x+\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}} = \frac{13}{3} \Leftrightarrow 3x - 10\sqrt{x} + 3 = 0$

$$\Leftrightarrow \sqrt{x} \in \left\{3; \frac{1}{3}\right\} \Leftrightarrow x \in \left\{9; \frac{1}{9}\right\}.$$

Câu 2. Gọi số chi tiết máy tổ I sản xuất được trong tháng thứ nhất là x.

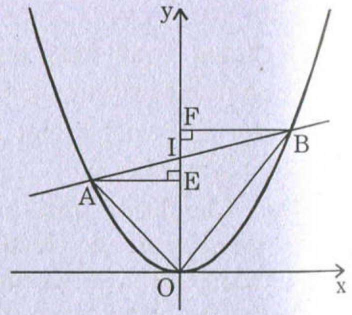
Số chi tiết máy tổ II làm được trong tháng thứ nhất là 900 – x ($x \in \mathbb{N}$, $0 < x < 900$)

Ta có phương trình : 1,15x + 1,1(900 – x) = 1010

Giải phương trình trên, ta được x = 400.

Vậy tháng thứ nhất tổ I sản xuất được 400 chi tiết máy và tổ II sản xuất được 500 chi tiết máy.

Câu 3.



1. Hoành độ giao điểm của (P) và (d) thỏa mãn phương trình :

$\frac{1}{4}x^2 = mx + 1 \Leftrightarrow \frac{1}{4}x^2 - mx - 1 = 0$ (1)

Vì $ac = -\frac{1}{4} < 0$ nên (1) luôn có hai nghiệm phân biệt trái dấu. Do đó (d) luôn cắt (P) tại hai điểm phân biệt A, B với mọi giá trị của m.

2. Gọi x_1, x_2 lần lượt là hoành độ của A, B ($x_1 < 0 < x_2$); E, F lần lượt là hình chiếu vuông góc của A, B lên trục tung; I là giao điểm của (d) với trục tung.

Từ phương trình của (d), cho x = 0 thì y = 1. Suy ra I(0; 1) và OI = 1.

Ta có : $2S_{OAB} = 2(S_{OAI} + S_{OBI}) = OI.AE + OI.BF = -x_1 + x_2$

$$= \sqrt{(-x_1+x_2)^2} = \sqrt{(x_1+x_2)^2 - 4x_1x_2} = \sqrt{(4m)^2+16}$$

$$= 4\sqrt{m^2+1}.$$

$$\Rightarrow S_{OAB} = 2\sqrt{m^2+1}.$$

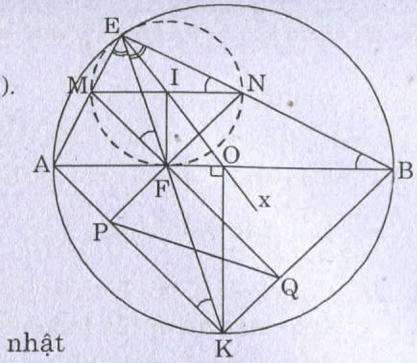
Câu 4.

1. Vì KB = KA nên $\widehat{KAF} = \widehat{KEA}$ suy ra $\Delta KAF \backsim \Delta KEA$ (g-g) (đpcm).

2. Vì E, I, O thẳng hàng nên (I; IE) tiếp xúc trong với (O) tại E.

Gọi Ox là tia đối của tia OE.

Ta có : $\widehat{OIF} = 2\widehat{OEF} = \widehat{xOK}$



Suy ra : IF // OK

Mà OK ⊥ AB nên IF ⊥ AB.

Vậy (I; IE) tiếp xúc với AB tại F (đpcm).

3. Ta có : $\widehat{INE} = \widehat{IEN} = \widehat{OBE}$

Suy ra : MN // AB (đpcm).

4. Ta có : $\widehat{EFM} = \widehat{ENM} = \widehat{EBA} = \widehat{EKA}$

Suy ra : MF // AK

Tương tự NF // BK

Mà $\widehat{AKB} = 90^0$ nên PKQF là hình chữ nhật

Suy ra KQ = PF = PA

Do đó : $KP + KQ + PQ = KP + PA + KF = AK + KF$

$$= R\sqrt{2} + KF \ge R\sqrt{2} + KO = R(\sqrt{2}+1)$$

Vậy chu vi ΔPKQ nhỏ nhất là $R(\sqrt{2}+1)$, đạt được khi và chỉ khi F trùng với O, hay E là điểm giữa của cung AB.

Câu 5. Đặt a = x – 1; b = 3 – x thì a + b = 2

Khi đó : $A = A^4 + b^4 + 6a^2b^2 = (a^2+b^2)^2 + 4a^2b^2 = (4-2ab)^2 + 4a^2b^2$

$$= 8(ab-1)^2 + 8 \ge 8$$

Vậy giá trị nhỏ nhất của A là 8, đạt được khi và chỉ khi :

$$a = b = 1 \Leftrightarrow x = 2.$$

ĐỀ 71

ĐỀ THI TUYỂN SINH VÀO LỚP 10 PTNK ĐHQG TP. HCM (TOÁN AB)
NĂM HỌC 2008 – 2009

Câu 1. Cho phương trình $\frac{x^2 + mx - 2m^2}{x + 2m} = (2m-1)x + 6$ (1)

a) Giải phương trình (1) khi m = –1.

b) Tìm tất cả các giá trị của m để phương trình (1) có nghiệm.

Câu 2.

a) Giải phương trình $a\sqrt{2x-1} - 2\sqrt{x-1} = -1$.

b) Giải hệ phương trình $\begin{cases} 2x^2 - x + 2y = 4xy \\ x^2 + 2xy = 4 \end{cases}$

Câu 3.

a) Chứng minh rằng biểu thức sau không phụ thuộc vào biến x (với x > 1) :

$$A = \frac{(x\sqrt{x} + 4x + 3\sqrt{x})(x\sqrt{x} - 1)}{(x-1)(x\sqrt{x} + x + \sqrt{x})(\sqrt{x} + 3)}$$

b) Cho a, b, c là các số thực khác 0 thỏa mãn $\begin{cases} a + 2b - 3c = 0 \\ bc + 2ca - 3ab = 0 \end{cases}$

Chứng minh a = b = c.

Câu 4. Cho tứ giác nội tiếp ABCD có $\widehat{A} < 90^0$; AC vuông góc với BD tại M; P là trung điểm của CD; H là trực tâm ΔABD.

a) Hãy xác định tỉ số $\dfrac{PM}{DH}$.

b) Gọi N và K lần lượt là chân đường cao kẻ từ B và D của tam giác ABD; Q là giao điểm của hai đường thẳng KM và BC.

Chứng minh rằng MN = MQ.

c) Chứng minh rằng tứ giác BQNK nội tiếp.

Câu 5. Một nhóm học sinh cần chia đều một lượng kẹo thành các phần quà. Nếu mỗi phần quà giảm 6 viên kẹo thì các em sẽ có thêm 5 phần quà nữa, còn nếu mỗi phần quà giảm 10 viên kẹo thì các em sẽ có thêm 10 phần quà nữa. Hỏi nhóm học sinh trên có bao nhiêu viên kẹo ?

BÀI GIẢI

Câu 1.

a) Khi m = –1 thì phương trình (1) trở thành :

$$x + 1 = -3x + 6 \text{ với } x \neq 2 \quad \Leftrightarrow x = \frac{5}{4}.$$

b) Điều kiện : $x \neq -2m$

$$(1) \Leftrightarrow x - m = (2m - 1)x + 6 \quad \Leftrightarrow 2x(1 - m) = m + 6$$

Vậy phương trình có nghiệm khi và chỉ khi $m \notin \left\{1;\ 2;\ -\dfrac{3}{4}\right\}$.

Câu 2.

a) Điều kiện $x \geq 1$

$$\sqrt{2x - 1} - 2\sqrt{x - 1} = -1 \quad \Leftrightarrow \left(\sqrt{2x - 1} + 1\right)^2 = \left(2\sqrt{x - 1}\right)^2$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{2x - 1} = x - 2 \quad \Leftrightarrow x = 5$$

b) $\begin{cases} 2x^2 - x + 2y = 4xy & (1) \\ x^2 + 2xy = 4 & (2) \end{cases}$

$$(1) \Rightarrow x(2x - 1) - 2y(2x - 1) = 0 \quad \Leftrightarrow (2x - 1)(x - 2y) = 0 \quad \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \dfrac{1}{2} \\ x = 2y \end{array}\right.$$

Thay vào phương trình (2), hệ phương trình có nghiệm là :

$$(x;\ y) \in \left\{\left(\frac{1}{2};\ \frac{15}{4}\right);\ \left(\sqrt{2};\ \frac{\sqrt{2}}{2}\right);\ \left(-\sqrt{2};\ -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\right\}.$$

Câu 3.

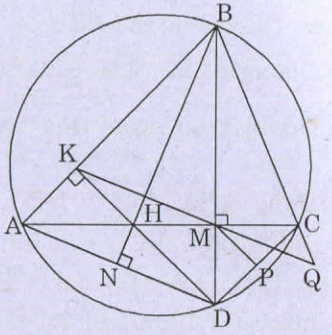
a) Ta có : $A = \dfrac{(x\sqrt{x} + 4x + 3\sqrt{x})(x\sqrt{x} - 1)}{(x - 1)(x\sqrt{x} + x + \sqrt{x})(\sqrt{x} + 3)}$

$$= \frac{\sqrt{x}(\sqrt{x} + 1)(\sqrt{x} + 3)(\sqrt{x} - 1)(x + \sqrt{x} + 1)}{(\sqrt{x} + 1)(\sqrt{x} - 1)\sqrt{x}(x + \sqrt{x} + 1)(\sqrt{x} + 3)} = 1.$$

b) Ta có : $a = -2b + 3c \Rightarrow bc + 2c(-2b + 3c) - 3b(-2b + 3c) = 0$

$$\Leftrightarrow 6(b - c)^2 = 0 \quad \Leftrightarrow b = c \quad \Leftrightarrow a = b = c.$$

Câu 4.



a) Ta có : $\widehat{MDH} = \widehat{BAC} = \widehat{MDC}$

Do đó ΔDHC cân tại D.

Suy ra : $\dfrac{MP}{DH} = \dfrac{MP}{DC} = \dfrac{1}{2}$.

b) Ta có : $\widehat{DMQ} = \widehat{DAB} = \widehat{DMN}$

$\Rightarrow \widehat{QMB} = \widehat{NMB}$

Mà $\widehat{MBQ} = \widehat{MAN} = \widehat{MBN}$

Nên ΔMBQ = ΔMBN (g-c-g)

Do đó MN = MQ.

c) Vì Q đối xứng với N qua BD nên tứ giác BQNK nội tiếp đường tròn đường kính BD.

Câu 5.

Gọi số viên kẹo ở mỗi phần quà là x; số phần quà là y ($x;\ y \in \mathbb{N}^*$)

Theo đề bài, ta có hệ phương trình : $\begin{cases} (x - 6)(y + 5) = xy \\ (x - 10)(y + 10) = xy \end{cases}$

Giải hệ phương trình trên, ta được : $\begin{cases} x = 30 \\ y = 20 \end{cases}$

Vậy tổng số viên kẹo là xy = 600 viên.

ĐỀ 72

ĐỀ THI TUYỂN SINH VÀO LỚP 10 PTNK ĐHQG TP. HCM (TOÁN CD)
NĂM HỌC 2008 – 2009

Câu 1. Giả sử x_1, x_2 là hai nghiệm của phương trình :

$$mx^2 - (m + 3)x + 2m + 1 = 0$$

a) Tính tổng S và tích P của hai nghiệm theo m. Biết S – P = 1, tính m, x_1, x_2.

b) Tìm hệ thức liên hệ giữa S và P độc lập với nhau.

Câu 2.

a) Giải hệ phương trình $\begin{cases} 2x^2 - 3y^2 = -0,19 \\ 5x^2 + 7y^2 = 0,83 \end{cases}$ (với $xy < 0$)

b) Giải phương trình $\sqrt{2x(x+1)} - \sqrt{x^2} = 1$.

Câu 3. Cho phân số $P = \dfrac{a}{a+3}$ ($a \in \mathbb{Z}^+$). Nếu mẫu số tăng thêm một thì giá trị phân số giảm $\dfrac{11}{325}$. Tính P.

Câu 4. Cho tam giác ABC có $\widehat{A} = 90^0$; AB = 6cm; AC = 8cm.

a) Đường tròn nội tiếp ΔABC có tâm I, bán kính r. Tính IA.

b) Đường tròn ngoại tiếp ΔABC có tâm O, bán kính R. Tính $\dfrac{IO}{\sqrt{R^2 - 2Rr}}$.

c) Dựng $AH \perp BC$ và $HK \perp AC$. Đường tròn ngoại tiếp ΔBKC cắt AB tại điểm thứ hai $E \neq B$. Tính $\widehat{AEH}$.

Câu 5. Một sinh viên kể : "Khi đang đi trên cây cầu sắt (sử dụng cho tàu hỏa) dài 120m thì tôi thấy một chiếc tàu hỏa đang lao đến. Tôi chạy ngược chiều tàu hỏa với vận tốc 18km/giờ. Khi tôi chạy đến cầu bên này thì 2 giây sau tàu hỏa mới đến nên tôi đã kịp tránh sang bên kia. Khi hoàn hồn lại, tôi tính được rằng nếu tôi chạy cùng chiều với tàu hỏa thì ngay khi đến đầu cầu bên kia tôi sẽ bị tầu hỏa đụng. May thật !". Biết tàu hỏa chạy với vận tốc 72km/giờ, hỏi khi bắt đầu chạy, anh sinh viên đang ở cách đầu cầu bên này bao nhiêu mét ?

BÀI GIẢI

Câu 1.

a) Ta có : $S = \dfrac{-m+3}{m}$; $P = \dfrac{2m+1}{m}$ $\Rightarrow S - P = \dfrac{-m+2}{m} = 1 \Rightarrow m = 1$

Với m = 1, phương trình đã cho trở thành : $x^2 - 4x + 3 = 0$

Khi đó : $(x_1; x_2) \in (1; 3), (3; 1)$.

b) Ta có : $\dfrac{S-1}{3} = \dfrac{1}{m} = P - 2 \Rightarrow S - 3P + 5 = 0$.

Câu 2.

a) $\begin{cases} 2x^2 - 3y^2 = -0,19 \\ 5x^2 + 7y^2 = 0,83 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 10x^2 - 15y^2 = -0,95 & (1) \\ 10x^2 + 14y^2 = 1,66 & (2) \end{cases}$

Lấy (2) – (1) : $29y^2 = 2,61 \Rightarrow y = 0,03; y = -0,03$.

Thay giá trị y vào (1), ta được nghiệm của hệ phương trình :

$$(x; y) \in \{(0,2; -0,3), (-0,2; 0,3)\}.$$

b) Điều kiện : $x \le -1 \vee x \ge 0$

$$\sqrt{2x(x+1)} - \sqrt{x^2} = 1 \Leftrightarrow \sqrt{2x(x+1)} = 1 + \sqrt{x^2}$$

$$\Leftrightarrow 2x^2 + 2x = 1 + 2|x| + x^2 \Leftrightarrow x^2 + 2x = 1 + 2|x|$$

– Với $x \le -1$, ta có : $x^2 + 2x = 1 - 2x \Leftrightarrow x^2 + 4x - 1 = 0$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -2 + \sqrt{5} \text{ (loại)} \\ x = -2 - \sqrt{5} \end{array}\right.$$

– Với $x \ge 0$, ta có : $x^2 + 2x = 1 + 2x \Leftrightarrow x^2 = 1 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1 \\ = -1 \text{ (loại)} \end{array}\right.$

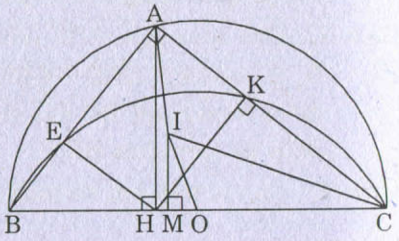
Câu 3.

Ta có : $\dfrac{a}{a+3} - \dfrac{a}{a+4} = \dfrac{11}{325} \Leftrightarrow \dfrac{a(a+4) - a(a+3)}{(a+3)(a+4)} = \dfrac{11}{325}$

$\Leftrightarrow 11a^2 - 248a + 132 = 0 \Leftrightarrow a = 22; a = \dfrac{6}{11}$ (loại)

Do đó : $P = \dfrac{a}{a+3} = \dfrac{22}{25}$.

Câu 4.



a) Ta có : $r = \dfrac{S}{P} = \dfrac{24}{12} = 2$

Do đó : $IA = r\sqrt{2} = 2\sqrt{2}$

b) Ta có : $R = 5$; $IO = \sqrt{2^2 + 1} = \sqrt{5}$

Suy ra : $\dfrac{IO}{\sqrt{R^2 - 2Rr}} = 1$.

c) Ta có : $AH^2 = AK.AC = AE.AB$

Suy ra $\widehat{AEH} = 90^0$.

Câu 5. Gọi khoảng cách cần tìm là x (km) ($0 < x < 0,12$).

Theo đề bài, ta có phương trình : $\dfrac{x}{18} + \dfrac{2}{3600} + \dfrac{0,12}{72} = \dfrac{0,12 - x}{18}$

Giải phương trình trên, ta được : x = 0,04.

ĐỀ 73

ĐỀ THI TUYỂN SINH VÀO LỚP 10 THPT CHUYÊN TP. HCM NĂM HỌC 2008 – 2009

Câu 1.

a) Tìm m để phương trình $x^2 + (4m+1)x + 2(m-4) = 0$ có hai nghiệm x_1, x_2 thỏa $|x_1 - x_2| = 17$.

b) Tìm m để hệ bất phương trình $\begin{cases} 2x \ge m - 1 \\ mx \ge 1 \end{cases}$ có nghiệm duy nhất.

Câu 2. Thu gọn các biểu thức sau :

a) $S = \dfrac{a}{(a-b)(a-c)} + \dfrac{b}{(b-c)(b-a)} + \dfrac{c}{(c-a)(c-b)}$ (a, b, c khác nhau đôi một)

b) $P = \dfrac{\sqrt{x+2\sqrt{x-1}} + \sqrt{x-\sqrt{2x-1}}}{\sqrt{x+\sqrt{2x-1}} - \sqrt{x-\sqrt{2x-1}}}$ $(x \ge 2)$.

Câu 3. Cho a, b, c, d là các số nguyên thỏa $a \le b \le c \le d$ và $a + d = b + c$. Chứng minh rằng :

a) $a^2 + b^2 + c^2 + d^2$ là tổng của ba số chính phương. **b)** $bc \ge ac$.

Câu 4.

a) Cho a, b là hai số thực thỏa $5a + b = 22$. Biết phương trình $x^2 + ax + b = 0$ có hai nghiệm là hai số nguyên dương. Hãy tìm hai nghiệm đó.

b) Cho hai số thực sao cho $x + y$, $x^2 + y^2$, $x^4 + y^4$ là các số nguyên. Chứng minh $x^3 + y^3$ cũng là các số nguyên.

Câu 5. Cho đường tròn (O) đường kính AB. Từ một điểm C thuộc đường tròn (O) kẻ CH vuông góc với AB (C khác A và B; H thuộc AB). Đường tròn tâm C bán kính CH cắt đường tròn (O) tại D và E. Chứng minh DE đi qua trung điểm của CH.

Câu 6. Cho tam giác ABC đều có cạnh bằng 1. Trên cạnh AC lấy các điểm D, E sao cho $\widehat{ABD} = \widehat{CBE} = 20^0$. Gọi M là trung điểm của BE và N là điểm trên cạnh BC sao cho BN = BM. Tính tổng diện tích hai tam giác BCE và tam giác BEN.

Câu 7. Cho a, b là hai số thực sao cho $a^3 + b^3 = 2$. Chứng minh $0 < a + b \le 2$.

BÀI GIẢI

Câu 1.

a) $x^2 + (4m + 1)x + 2(m - 4) = 0$

Ta có : $\Delta = (4m + 1)^2 - 8(m - 4) = 16m^2 + 33 > 0\ \forall m$ nên phương trình trên luôn có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2.

Mặt khác : $S = -4m - 1$; $P = 2m - 8$

Do đó : $|x_1 - x_2| = 17 \Leftrightarrow (x_1 - x_2)^2 = 289 \Leftrightarrow S^2 - 4P = 289$

$\Leftrightarrow (-4m - 1)^2 - 4(2m - 8) = 289$

$\Leftrightarrow 16m^2 + 33 = 289 \Leftrightarrow m^2 = 16 \Leftrightarrow m = \pm 4$

Vậy giá trị m cần tìm là $m = \pm 4$.

b) $\begin{cases} 2x \ge m - 1 & (1) \\ mx \ge 1 & (2) \end{cases}$

$(1) \Leftrightarrow x \ge \dfrac{m-1}{2}$

Xét phương trình (2) :

– Với $m > 0$: $(2) \Leftrightarrow x \ge \dfrac{1}{m}$

– Với $m = 0$: $(2) \Leftrightarrow 0.x \ge 1$ (VN)

– Với $m < 0$: $(2) \Leftrightarrow x \le \dfrac{1}{m}$

Vậy hệ có nghiệm duy nhất $\Leftrightarrow \begin{cases} m < 0 \\ \dfrac{1}{m} = \dfrac{m-1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m < 0 \\ m^2 - m - 2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow m = -1.$

Câu 2.

a) $S = \dfrac{a}{(a-b)(a-c)} + \dfrac{b}{(b-c)(b-a)} + \dfrac{c}{(c-a)(c-b)}$

$= \dfrac{a(c-b) + b(a-c) + c(b-a)}{(a-b)(b-c)(c-a)} = \dfrac{ac - ab + ba - bc + cb - ca}{(a-b)(b-c)(c-a)} = 0$

Vậy S = 0.

b) $P = \dfrac{\sqrt{x+2\sqrt{x-1}} + \sqrt{x-\sqrt{2x-1}}}{\sqrt{x+\sqrt{2x-1}} - \sqrt{x-\sqrt{2x-1}}} = \dfrac{\sqrt{2}\left[\sqrt{\left(\sqrt{x-1}+1\right)^2} + \sqrt{\left(\sqrt{x-1}-1\right)^2}\right]}{\sqrt{2x+2\sqrt{2x-1}} - \sqrt{2x-2\sqrt{2x-1}}}$

$= \dfrac{\sqrt{2}\left[\left|\sqrt{x-1}+1\right| + \left|\sqrt{x-1}-1\right|\right]}{\sqrt{\left(\sqrt{2x-1}+1\right)^2} - \sqrt{\left(\sqrt{2x-1}-1\right)^2}} = \dfrac{\sqrt{2}\left[\left|\sqrt{x-1}+1\right| + \left|\sqrt{x-1}-1\right|\right]}{\left|\sqrt{2x-1}+1\right| - \left|\sqrt{2x-1}-1\right|}$

$= \dfrac{\sqrt{2}\left[\sqrt{x-1}+1+\sqrt{x-1}-1\right]}{\sqrt{2x-1}+1-\left(\sqrt{2x-1}-1\right)} = \sqrt{2}\sqrt{x-1}$

(vì $x \ge 2$ nên $\sqrt{x-1} \ge 1$ và $\sqrt{2x-1} \ge 1$).

Câu 3.

a) Vì $a \le b \le c \le d$ nên ta đặt $a = b - k$ và $d = c + h$ $(h, k \in \mathbb{N})$

Khi đó do $a + d = b + c \Leftrightarrow b + c + h - k = b + c \Leftrightarrow h = k$

Vậy $a = b - k$ và $d = c + k$

Do đó : $a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = (b - k)^2 + b^2 + c^2 + (c + k)^2$

$= 2b^2 + 2c^2 + 2k^2 - 2bk + 2ck$

$= b^2 + 2bc + c^2 + b^2 + c^2 + k^2 - 2bc - 2bk + 2ck + k^2$

Vì $b + c$, $b - c - k$ và k là các số nguyên nên $a^2 + b^2 + c^2 + d^2$ là tổng của ba số chính phương.

b) Ta có : $ad = (b - k)(c + k) = bc + bk - ck - k^2$

$= bc + k(b - c) - k^2 < bc$ (đpcm) (vì $k \in \mathbb{N}$ và $b \le c$).

Câu 4.

a) Gọi x_1, x_2 là hai nghiệm nguyên dương của phương trình, $x_1 \le x_2$.

Ta có : $a = -x_1 - x_2$ và $b = x_1x_2$ nên $5(-x_1 - x_2) + x_1x_2 = 22$

$\Leftrightarrow x_1(x_2 - 5) - 5(x_2 - 5) = 47 \Leftrightarrow (x_1 - 5)(x_2 - 5) = 47$ (*)

Ta có : $-4 \le x_1 - 5 \le x_2 - 5$ nên (*) $\Leftrightarrow \begin{cases} x_1 - 5 = 1 \\ x_2 - 5 = 47 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = 6 \\ x_2 = 52 \end{cases}$

Khi đó $a = -58$ và $b = 312$ thỏa $5a + b = 22$.

Vậy hai nghiệm cần tìm là : $x_1 = 6$ và $x_2 = 52$.

b) Ta có : $(x + y)(x^2 + y^2) = x^3 + y^3 + xy(x + y)$ (1)

$x^2 + y^2 = (x + y)^2 - 2xy$ (2)

$x^4 + y^4 = (x^2 + y^2)^2 - 2x^2y^2$ (3)

Vì $x + y$, $x^2 + y^2$ là số nguyên nên từ (2), suy ra $2xy$ là số nguyên.

Vì $x^2 + y^2$, $x^4 + y^4$ là số nguyên nên từ (3), suy ra $2x^2y^2 = \frac{1}{2}(2xy)^2$ là số nguyên $\Rightarrow (2xy)^2$ chia hết cho 2 $\Rightarrow 2xy$ chia hết cho 2 (do 2 là số nguyên tố) $\Rightarrow xy$ là số nguyên.

Do đó từ (1) suy ra $x^3 + y^3$ là số nguyên.

Câu 5. Gọi C' là điểm đối xứng của C qua O. Ta có :

$OC \perp DE = I$ (tính chất đường nối tâm)

$\Rightarrow \Delta CKI \backsim \Delta COH$ (g-g)

Suy ra $CK.CH = CI.CO$

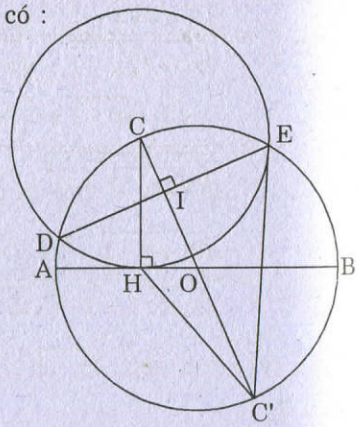
$\Rightarrow 2CK.CH = CI.2CO = CI.CC'$

Mặt khác tam giác CEC' vuông tại E và có EI^2 là đường cao nên :

$CI.CC' = CE^2 = CH^2$

$\Rightarrow 2CK.CH = CH^2 \Rightarrow 2CK = CH$

Vậy K là trung điểm của CH.



Câu 6. Kẻ $BI \perp AC \Rightarrow$ I là trung điểm của AC.

Theo đề bài : $\widehat{ABD} = \widehat{CBE} = 20^0 \Rightarrow \widehat{DBE} = 20^0$

Ta có : $\Delta ADB = \Delta CEB$ (g-c-g)

$\Rightarrow BD = BE \Rightarrow \Delta BDE$ cân tại B

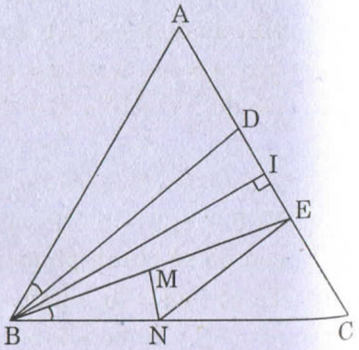
$\Rightarrow$ I là trung điểm của DE

Mặt khác $BM = BN$ và $\widehat{MBN} = 20^0$

$\Rightarrow \Delta BMN \backsim \Delta BDE$ (g-g)

Suy ra : $\dfrac{S_{BMN}}{S_{BED}} = \left(\dfrac{BM}{BE}\right)^2 = \dfrac{1}{4}$

$\Rightarrow S_{BNE} = 2.S_{BMN} = \dfrac{1}{2}.S_{BDE} = S_{BIE}$



Vậy : $S_{BCE} + S_{BNE} = S_{BCE} + S_{BIE} = S_{BIC} = \dfrac{1}{2}.S_{ABC} = \dfrac{\sqrt{3}}{8}$.

Câu 7. Ta có : $a^3 + b^3 > 0 \Rightarrow a^3 > -b^3 \Rightarrow a > -b \Rightarrow a + b > 0$ (1)

$(a - b)^2(a + b) \ge 0 \Rightarrow (a^2 - b^2)(a - b) \ge 0 \Rightarrow a^3 + b^3 - ab(a + b) \ge 0$

$\Rightarrow a^3 + b^3 \ge ab(a + b) \Rightarrow 3(a^3 + b^3) \ge 3ab(a + b)$

$\Rightarrow 4(a^3 + b^3) \ge (a + b)^3 \Rightarrow 8 \ge (a + b)^3 \Rightarrow a + b \le 2$ (2)

Từ (1) và (2), suy ra : $0 < a + b \le 2$.

ĐỀ 74

ĐỀ THI TUYỂN SINH VÀO LỚP 10 THPT CHU VĂN AN VÀ THPT HÀ NỘI – AMSTERDAM (CHUYÊN KHOA HỌC TỰ NHIÊN)

NĂM HỌC 2008 – 2009

Câu 1. Cho hệ phương trình $\begin{cases} \sqrt{x + 19} - \sqrt{y + 6} = (m - 2008)y + 1 \\ \sqrt{y + 19} - \sqrt{x + 6} = (m - 2008)x + 1 \end{cases}$

1. Giải hệ phương trình khi m = 2008.
2. Chứng minh hệ phương trình đã cho có không quá một nghiệm khi $m \ge 2008$.

Câu 2. Với mỗi số tự nhiên n, ta đặt $a_n = 3n^2 + 6n + 13$

1. Chứng minh rằng : Nếu hai số a_i, a_k không chia hết cho 5 và chia cho 5 có số dư khác nhau thì $(a_i + a_k)$ chia hết cho 5.
2. Tìm số tự nhiên n lẻ để a_n là số chính phương.

Câu 3. Cho a là số thay đổi thỏa mãn $-1 \le a \le 1$. Tìm giá trị lớn nhất của b sao cho bất đẳng thức sau luôn đúng :

$$2\sqrt{1 - a^4} + (b - 1)\left(\sqrt{1 + a^2} - \sqrt{1 - a^2}\right) + b - 4 \le 0$$

Câu 4. Cho tam giác ABC vuông tại A. Vẽ hai đường tròn (O_1) và (O_2) lần lượt có đường kính AB và AC. Gọi H là giao điểm thứ hai của (O_1) và (O_2). Đường thẳng d thay đổi đi qua A cắt các đường tròn (O_1), (O_2) lần lượt tại các điểm D, E sao cho A nằm giữa D và E.

1. Chứng minh rằng đường trung trực của đoạn DE luôn đi qua một điểm cố định khi đường thẳng d thay đổi.
2. Xác định vị trí của đường thẳng d để diện tích tứ giác BDEC đạt giá trị lớn nhất. Tính giá trị lớn nhất đó theo b và c, với b = AC, c = AB.
3. Đường thẳng đi qua trung điểm đoạn DE và vuông góc với BC cắt BC tại điểm K. Chứng minh rằng $KB^2 = BD^2 + KH^2$.

Câu 5. Cho A là tập hợp gồm 6 phần tử bất kì của tập hợp {0; 1; 2; ...; 14}. Chứng minh rằng tồn tại hai tập hợp con B_1 và B_2 của tập hợp A (B_1, B_2 khác nhau và khác rỗng) sao cho tổng tất cả các phần tử của tập hợp B_1 bằng tổng tất cả các phần tử của tập hợp B_2.

BÀI GIẢI

Câu 1. Điều kiện : $x \geq -6,\ y \geq -6$

$$\begin{cases} \sqrt{x+19} - \sqrt{y+6} = (m-2008)y + 1 & (1) \\ \sqrt{y+19} - \sqrt{x+6} = (m-2008)x + 1 & (2) \end{cases}$$

Lấy (1) – (2), ta được :

$$A = \sqrt{x+19} - \sqrt{y+19} + \sqrt{x+6} - \sqrt{y+6} = (m-2008)(y-x) \qquad (3)$$

1. Với m = 2008, ta có A = 0

Nếu x > y thì $\sqrt{x+19} > \sqrt{y+19}$ và $\sqrt{x+6} > \sqrt{y+6}$. Suy ra A > 0 (vô lí).

Tương tự, nếu x < y thì A < 0.

Vậy x = y, thay vào (1), ta được :

$$\sqrt{x+19} - \sqrt{x+6} = 1 \Leftrightarrow \sqrt{x+19} = \sqrt{x+6} + 1$$

$$\Leftrightarrow x + 19 = x + 6 + 1 + 2\sqrt{x+6} \Leftrightarrow \sqrt{x+6} = 6 \Leftrightarrow x = 30$$

Vậy hệ phương trình đã cho có nghiệm (x; y) là : (30; 30).

2. Với m > 2008, tương tự như trên, từ (3) ⇒ x = y. Do đó số nghiệm của hệ phương trình đã cho cũng là số nghiệm của phương trình :

$$\sqrt{x+19} - \sqrt{x+6} = (m-2008)x + 1 \qquad (4)$$

Giả sử hai nghiệm của phương trình (4) là $x_1 > x_2$, ta có :

$$\sqrt{x_1+19} - \sqrt{x_1+6} = (m-2008)x_1 \qquad (5)$$

$$\sqrt{x_2+19} - \sqrt{x_2+6} = (m-2008)x_2 \qquad (6)$$

Lấy (5) – (6), ta được :

$$\left(\sqrt{x_1+19} - \sqrt{x_2+19}\right) - \left(\sqrt{x_1+6} - \sqrt{x_2}+6\right) = (m-2008)(x_1-x_2)$$

$$\Leftrightarrow (x_1 - x_2)\left(\frac{1}{\sqrt{x_1+19} + \sqrt{x_2+19}} - \frac{1}{\sqrt{x_1+6} + \sqrt{x_2}+6}\right) = (m-2008)(x_1-x_2)$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{1}{\sqrt{x_1+19} + \sqrt{x_2+19}} - \frac{1}{\sqrt{x_1+6} + \sqrt{x_2}+6}\right) = m - 2008 \qquad (7)$$

Dễ thấy (7) có vế phải là một số dương và vế trái là một số âm nên không thể xảy ra.

Vậy phương trình (4) có không quá một nghiệm hay hệ phương trình đã cho có không quá một nghiệm.

Câu 2.

1. Ta có : $a_n = 3n^2 + 6n + 13 = 3(n+1)^2 + 10$

Và $3(n+1)^2$ có tận cùng là 0, 2, 3, 5, 7 hoặc 8. Do đó a_n chia 5 dư 0, 2 hoặc 3.

Suy ra với a_i, a_k không chia hết cho 5 có số dư khác nhau thì $a_i + a_k \vdots 5$.

2. Với n lẻ thì $a_n = 3(n+1)^2 + 10$ chia 4 dư 2. Mặt khác, vì a_n là số chính phương nên a_n chia 4 dư 0 hoặc 1.

Vậy không tồn n lẻ để a_n là số chính phương.

Câu 3. Đặt $t = \sqrt{1+a^2} - \sqrt{1-a^2},\ 0 \leq t \leq \sqrt{2}$

Bất đẳng thức đã cho trở thành :

$$-t^2 + (b-1)t + b - 2 \leq 0 \Leftrightarrow \frac{t^2+t+2}{t-1} \geq b \Leftrightarrow A = t + 1 + \frac{2}{t+1} - 1 \geq b$$

Áp dụng bất đẳng thức Cô-si, ta có : $A \geq 2\sqrt{2} - 1$

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $t = \sqrt{2} - 1$

Suy ra $A \geq b\ \forall t \in \left[0; \sqrt{2}\right]$ khi và chỉ khi $b \leq 2\sqrt{2} - 1$

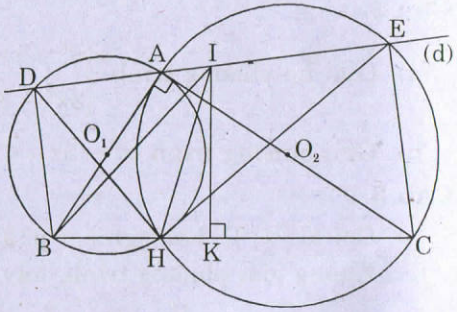
Vậy giá trị lớn nhất của b là $2\sqrt{2} - 1$.

Câu 4.

1. Vì AB và AC lần lượt là đường kính của đường tròn (O_1) và đường tròn (O_2) nên tứ giác BDEC là hình thang vuông.

Vậy đường trung trực của đoạn DE là đường trung bình của hình thang BDEC. Do đó đường trung trực của đoạn DE luôn đi qua trung điểm của BC.

2. Ta có : $S_{BDEC} = S_{ABC} + S_{ABD} + S_{ACE}$



Tam giác ABD có AB không đổi nên S_{ABD} lớn nhất khi và chỉ khi đường cao hạ từ D xuống AB lớn nhất, suy ra D là điểm chính giữa của cung AB.

Khi đó $\widehat{BAD} = 45^0 \Rightarrow \widehat{CAE} = 45^0$ (vì $\widehat{BAC} = 90^0$) và E là điểm chính giữa cung AC, nên S_{AEC} lớn nhất.

Do đó S_{BDEC} lớn nhất khi và chỉ khi D là điểm chính giữa cung AB.

Ta có : $S_{BDEC} = S_{ABC} + S_{ABD} + S_{ACE} = \frac{1}{4}(b+c)^2$.

3. Gọi I là trung điểm của DE.

Ta có : $\widehat{BHD} = \widehat{BAD}$ (cùng chắn cung BD)

$\widehat{CHE} = \widehat{CAE}$ (cùng chắn cung CE)

Suy ra : $\widehat{DHE} = \widehat{BAC} = 90^0 \Rightarrow HI = ID$

Áp dụng định lí Pitago cho các tam giác vuông, ta được :

$$KB^2 = IB^2 - IK^2 = IB^2 - IH^2 + HK^2 = IB^2 - ID^2 + HK^2$$
$$= BD^2 + HK^2 \text{ (đpcm).}$$

Câu 5. Xét các tập con không quá 2 phần tử của A.

Giả sử các tổng của các phần tử của mỗi tập con đó đều khác nhau. Do đó các phần tử của A đều khác 0.

Giả sử 6 phần tử là $a_1 < a_2 < \ldots < a_6$. Khi đó $a_1 \geq 1$; $a_2 \neq a_1$ nên $a_2 \geq 2$; $a_3 \neq a_1$; $a_3 \neq a_2$ và $a_3 \neq a_1 + a_2$ nên $a_3 \geq 4$.

Tương tự như trên, ta có : $a_4 \geq 7$; $a_5 \geq 14$; $a_6 \geq 22$.

Vô lí vì $a_i \in \{0; 1; 2; \ldots; 14\}$

Vậy trong các phần tử đang xét, có ít nhất hai tập hợp có tổng các phần tử bằng nhau.

ĐỀ 75

ĐỀ THI TUYỂN SINH VÀO LỚP 10 THPT CHUYÊN LÊ QUÝ ĐÔN, ĐÀ NẴNG NĂM HỌC 2008 – 2009

Câu 1.

a) Chứng minh đẳng thức $(2a^2 + a + 1)^2 - 4a(2a + 1) = (2a^2 + a - 1)^2$.

b) Tìm điều kiện đối với tham số a để phương trình :

$$(2a + 1)x^2 - (2a^2 + a + 1)x + a = 0$$

có hai nghiệm phân biệt khác 1.

Câu 2.

a) Giải hệ phương trình $\begin{cases} x^2 - xy + x - y = 4 \\ 3x^2 - 3xy - 5x + 5y = 4 \end{cases}$

b) Giải phương trình $x^2 - 5x + 4 = 2\sqrt{x - 1}$.

Câu 3.

a) Gọi x_1, x_2 là hai nghiệm phân biệt của phương trình $x^2 - x - 10 = 0$. Không giải phương trình, hãy tính giá trị của biểu thức

$$P = (2x_1 + 7x_2)^2 + 9(3x_1 - 2x_2) - 577.$$

b) Cho biểu thức $P = 21x - 6\sqrt{xy} + 2008y - 9\sqrt{x} + 10$

Tìm điều kiện đối với các biến số x và y để biểu thức P có nghĩa. Biểu thức P có giá trị nhỏ nhất không ? Tại sao ?

Câu 4. Ước chung lớn nhất của các số nguyên x và y (x và y không đồng thời bằng 0) được kí hiệu là (x, y).

a) Cho bốn số nguyên a, b, c, d thỏa mãn $b > 0$, $d > 0$, $(a, b) = (c, d) = 1$. Chứng minh rằng nếu $\frac{a}{b} + \frac{c}{d}$ là một số nguyên thì $b = d$.

b) Tìm tất cả các số nguyên dương a, b, c sao cho $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}$ là một số nguyên và $(a, b) = (b, c) = 1$.

Câu 5. Cho **H** là hình vuông có tâm O và độ dài cạnh bằng 1. Tìm số thực dương r để đường tròn (O; r) cắt tất cả các cạnh của **H** và các giao điểm tạo thành các đỉnh của một bát giác đều.

Câu 6. Cho đường tròn (O; R) và hai điểm B, C cố định trên (O; R) thỏa mãn $\widehat{BOC} = 120^0$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $\frac{1}{MB} + \frac{1}{MC}$ khi M di động trên cung nhỏ BC của đường tròn (O; R) mà $M \neq B$ và $M \neq C$.

BÀI GIẢI

Câu 1.

a) Ta có : $(2a^2 + a + 1)^2 - (2a^2 + a - 1)^2 = 2(4a^2 + 2a) = 4a(2a + 1)$

Vậy : $(2a^2 + a + 1)^2 - 4a(2a + 1) = (2a^2 + a - 1)^2$.

b) Đặt $f(x) = (2a + 1)x^2 - (2a^2 + a + 1)x + a$

Phương trình f(x) = 0 có hai nghiệm phân biệt khác 1

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a \neq -\frac{1}{2} \\ \Delta > 0 \\ f(1) \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a \neq -\frac{1}{2} \\ (2a^2 + a - 1)^2 > 0 \\ 2a - 2a^2 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a \neq -\frac{1}{2} \\ 2a^2 + a - 1 \neq 0 \\ 2a^2 - 2a \neq 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a \neq -\frac{1}{2} \\ a \neq \frac{1}{2};\ -1 \\ a \neq 0; 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a \neq 0 \\ a \neq \pm\frac{1}{2} \\ a \neq \pm 1 \end{cases}$$

Câu 2.

a) $\begin{cases} x^2 - xy + x - y = 4 & (1) \\ 3x^2 - 3xy - 5x + 5y = 4 & (2) \end{cases}$

Dễ thấy x = y không phải là nghiệm của hệ phương trình.

Lấy (1) – (2), ta được : $(x - y)(2x - 6) = 0 \Leftrightarrow x = 3$ (vì $x \neq y$)

Thay vào (1), ta được : y = 2

Vậy hệ phương trình đã cho có nghiệm (x; y) là : (3; 2).

b) $x^2 - 5x + 4 = 2\sqrt{x - 1} \Leftrightarrow (x - 1)(x - 4) = 2\sqrt{x - 1}$ (1)

Đặt $t = \sqrt{x - 1}$ $(t \geq 0)$, (1) trở thành :

$$t^2(t^2 - 3) = 2t \Leftrightarrow t(t + 1)^2(t - 2) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = 0 \\ t = -1 \text{ (loại)} \\ t = 2 \end{array}\right.$$

Với t = 0, thì $\sqrt{x - 1} = 0 \Leftrightarrow x = 1$.

Với t = 2, thì $\sqrt{x-1} = 2 \Leftrightarrow x = 5$.

Vậy phương trình đã cho có nghiệm là x = 1; x = 5.

Câu 3.

a) Ta có : $P = 4x_1^2 + 28x_1x_2 + 49x_2^2 + 27x_1 - 18x_2 - 577$

$$= 4x_1^2 - 4x_1 + 49x_2^2 - 49x_2 + 28x_1x_2 + 31x_1 + 31x_2 - 577$$

$$= 4.10 + 49.10 + 28x_1x_2 + 31(x_1 + x_2) - 577 \qquad (*)$$

Áp dụng định lí Vi-ét cho phương trình $x^2 - x - 10 = 0$, ta có :

$$x_1 + x_2 = 1 \text{ và } x_1x_2 = -10$$

Thay vào (*), ta được : $P = 530 + 28(-10) + 31.1 - 577 = -296$

b) Điều kiện để P có nghĩa là : $x \geq 0$; $xy \geq 0$.

Với x = 0, suy ra P có nghĩa với mọi y. Khi đó P = 2008y + 10 có thể nhỏ tùy ý.

Vậy P không có giá trị nhỏ nhất.

Câu 4.

a) Giả sử $\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = k \in \mathbb{Z}$

Ta có : $ad + bc = kbd \Leftrightarrow ad = b(kd - c) \,\vdots\, b \Rightarrow d \,\vdots\, b$ (vì (a, b) = 1)

Tương tự như trên, ta có : $b \,\vdots\, d$

Suy ra : b = d (đpcm).

b) Giả sử $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = \frac{a+c}{ac} + \frac{1}{b} = \frac{m}{n} + \frac{1}{b} = k \in \mathbb{Z}$, trong đó (m, n) = 1

$(m, n \in \mathbb{N}^*)$.

Theo phần a), ta có : $n = b \Rightarrow b$ là ước số của ac

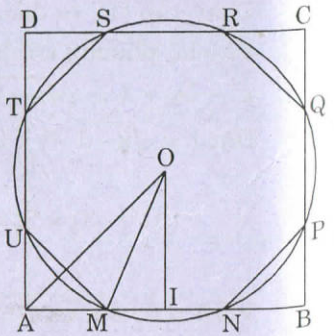
$$\Rightarrow b = 1 \text{ (vì (a, b) = (b, c) = 1).}$$

Do đó : $\frac{1}{a} + \frac{1}{c}$ là số nguyên, theo phần a) $\Rightarrow$ a = c = 1 hoặc a = c = 2

Vậy có hai bộ số (a; b; c) cần tìm là : (1; 1; 1) và (2; 1; 2).

Câu 5. Gọi ABCD là hình vuông đã cho và I là trung điểm của AB.

Đường tròn (O; r) cắt hình vuông ABCD tại 8 điểm phân biệt khi và chỉ khi $OI < r < OA \Leftrightarrow \frac{1}{2} < r < \frac{\sqrt{2}}{2}$



Suy ra : $MN = PQ = RS = TU$

$$= 2\sqrt{OM^2 - OI^2} = \sqrt{4r^2 - 1}$$

$$NP = QR = ST = UM$$

$$= AM\sqrt{2} = \frac{1 - MN}{\sqrt{2}}$$

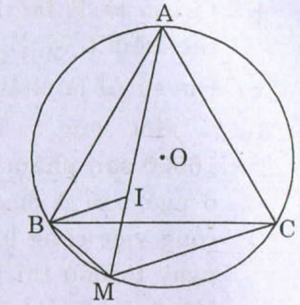
Vì MNPQRSTU là bát giác đều nên :

$$\frac{1 - MN}{\sqrt{2}} = MN \Leftrightarrow MN = \sqrt{2} - 1 \Leftrightarrow \sqrt{4r^2 - 1} = \sqrt{2} - 1 \Leftrightarrow r = \sqrt{1 - \frac{\sqrt{2}}{2}}$$

Vậy giá trị r cần tìm là $r = \sqrt{1 - \frac{\sqrt{2}}{2}}$.

Câu 6. Gọi A là điểm chính giữa của cung lớn BC, ta có tam giác ABC là tam giác đều.

Trên cạnh AM ta lấy điểm I sao cho IM = MB, do $\widehat{BMI} = \widehat{BCA} = 60^0$ nên tam giác BMI là tam giác đều.



Ta có : $\widehat{MBC} = \widehat{IBA}$ (vì cùng bằng $60^0 - \widehat{CBI}$)

Mặt khác, ta có :

$$BM = BI \text{ và } \widehat{BMC} = \widehat{BIA} = 120^0$$

Do đó : $\Delta ABI = \Delta CBM$ (c-g-c)

Suy ra : MB + MC = MA

Áp dụng bất đẳng thức Cô-si cho hai số dương, ta được :

$$\frac{1}{MB} + \frac{1}{MC} \geq \frac{2}{\sqrt{MB + MC}} \geq \frac{4}{MB + MC} = \frac{4}{MA} \geq \frac{4}{2R} = \frac{2}{R}$$

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi M là điểm chính giữa cung nhỏ BC.

Vậy $\frac{1}{MB} + \frac{1}{MC}$ đạt giá trị nhỏ nhất bằng $\frac{2}{R}$ khi M là điểm chính giữa cung nhỏ BC.

ĐỀ 76

ĐỀ THI TUYỂN SINH VÀO LỚP 10 PTNK ĐHQG TP. HCM (TOÁN AB) NĂM HỌC 2007 – 2008

Câu 1. Cho phương trình : $\frac{x^2 - 2x\sqrt{m} + 2\sqrt{m}(\sqrt{m} + 1) - 3}{x - 1} = 0$ (1)

a) Tìm m để x = –1 là một nghiệm của (1).

b) Tìm m để phương trình (1) vô nghiệm.

Câu 2.

a) Giải bất phương trình $|(x - 1)(x + 3)| - 2|x - 1| < x^2 - 7$

b) Giải hệ phương trình $\begin{cases} x\sqrt{y} + 2y\sqrt{x} = 3x\sqrt{2x - 1} \\ y\sqrt{x} + 2x\sqrt{y} = 3y\sqrt{2y - 1} \end{cases}$

Câu 3.

a) Cho a, b là hai số thực thỏa mãn điều kiện :

$$a^2 - 3ab + 2b^2 + a - b = a^2 - 2ab + b^2 - 5a + 7b = 0$$

Chứng tỏ rằng : ab – 12a + 15b = 0.

b) Cho $A = \dfrac{(\sqrt{x^2+4}-2)(x+\sqrt{x}+1)(\sqrt{x^2+4}+2)\sqrt{x-2\sqrt{x}+1}}{x(x\sqrt{x}-1)}$

Hãy tìm tất cả các giá trị của x để $A \geq 0$.

Câu 4. Cho tam giác ABC nhọn có trực tâm là H và $\widehat{BAC} = 60^0$. Gọi M, N, P lần lượt là chân các đường cao kẻ từ A, B, C của tam giác ABC và I là trung điểm của BC.

a) Chứng minh rằng tam giác INP đều.

b) Gọi E và K lần lượt là trung điểm của PB và NC. Chứng minh rằng các điểm I, M, E, K cùng thuộc một đường tròn.

c) Giả sử AI là phân giác của $\widehat{NAP}$. Hãy tính số đo của $\widehat{BCP}$.

Câu 5. Một công ty may giao cho tổ A may 16800 sản phẩm, tổ B may 16500 sản phẩm và bắt đầu thực hiện công việc cùng một lúc. Nếu sau 6 ngày, tổ A được hỗ trợ thêm 10 công nhân may thì họ hoàn thành công việc cùng lúc với tổ B. Nếu tổ A hỗ trợ thêm 10 công nhân may ngay từ đầu thì họ sẽ hoàn thành công việc sớm hơn tổ B một ngày. Hãy xác định số công nhân ban đầu của mỗi tổ. Biết rằng mỗi công nhân mỗi ngày may được 20 sản phẩm.

BÀI GIẢI

Câu 1.

a) Điều kiện : $m \geq 0$

Vì $x = -1$ là một nghiệm của (1) nên ta có :

$$m + 2\sqrt{m} - 1 = 0 \Rightarrow m = 3 - 2\sqrt{2}.$$

b) (1) vô nghiệm khi và chỉ khi $x^2 - 2x\sqrt{m} + 2\sqrt{m}(\sqrt{m}+1) - 3 = 0$ (2)

vô nghiệm hoặc có nghiệm kép bằng 1.

(2) có nghiệm kép bằng 1 khi $m = 1$

(2) vô nghiệm khi $\Delta' = m - 2\sqrt{m}(\sqrt{m}+1) + 3 < 0$

$$\Leftrightarrow m + 2\sqrt{m} - 3 > 0 \Leftrightarrow (\sqrt{m}+1)^2 > 4 \Leftrightarrow m > 1$$

Vậy với $m \geq 1$ thì (1) vô nghiệm.

Câu 2.

a) Với $x < -3$, (1) trở thành : $(x-1)(x+3) + 2(x-1) < x^2 - 7$

$$\Leftrightarrow x^2 + 4x - 5 < x^2 - 7 \;\Leftrightarrow x < -\frac{1}{2}$$

Vậy (1) có nghiệm $x < -3$.

- Với $-3 \leq x \leq 1$, (1) trở thành : $(x+3)(x-1) + 2(x-1) < x^2 - 7 \Leftrightarrow x^2 > 4$

  Vậy (1) có nghiệm $-3 \leq x < -2$.

- Với $x > 1$, (1) trở thành : $(x+3)(x-1) - 2(x-1) < x^2 - 7$

  $$\Leftrightarrow x^2 - 1 < x^2 - 7 \text{ (vô nghiệm)}$$

Vậy (1) vô nghiệm.

Tóm lại (1) có nghiệm là $x < -2$.

b) Điều kiện : $x \geq \frac{1}{2}$, $y \geq \frac{1}{2}$

$$\begin{cases} x\sqrt{y} + 2y\sqrt{x} = 3x\sqrt{2x-1} \\ y\sqrt{x} + 2x\sqrt{y} = 3y\sqrt{2y-1} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{xy}(\sqrt{x} + 2\sqrt{y}) = 3x\sqrt{2x-1} \\ \sqrt{xy}(\sqrt{y} + 2\sqrt{x}) = 3y\sqrt{2y-1} \end{cases}$$

Nếu $x > y$ thì :

$$3x\sqrt{2x-1} > 3y\sqrt{2y-1} \;\Rightarrow\; \sqrt{xy}(\sqrt{x} + 2\sqrt{y}) > \sqrt{xy}(\sqrt{y} + 2\sqrt{x})$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{x} + 2\sqrt{y} > \sqrt{y} + 2\sqrt{x}$$

Suy ra $x < y$ (vô lí).

Vậy không xảy ra $x > y$.

Làm tương tự cũng không xảy ra trường hợp $x < y$.

Do đó $x = y$.

Vậy hệ đã cho có nghiệm duy nhất $(x; y) = (1; 1)$.

Câu 3.

a) $a^2 - 3ab + 2b^2 + a - b = 0 \;\Leftrightarrow (a-b)(a-2b+1) = 0$

Với $a = b$ thay vào phương trình $a^2 - 2ab + b^2 - 5a + 7b = 0$, ta được :

$a = b = 0 \Leftrightarrow ab - 12a + 15b = 0$

Với $a - 2b + 1 = 0$, ta có :

$2(a^2 - 2ab + b^2 - 5a + 7b) - (a - 2b + 1)(2a - b) = 0$

$\Leftrightarrow ab - 12a + 15b = 0$

Vậy $ab - 12a + 15b = 0$.

b) Điều kiện : $x > 0$, $x \neq 1$. Ta có :

$$A = \frac{(\sqrt{x^2+4}-2)(x+\sqrt{x}+1)(\sqrt{x^2+4}+2)\sqrt{x-2\sqrt{x}+1}}{x(x\sqrt{x}-1)}$$

$$= \frac{(\sqrt{x^2+4}-2)(x+\sqrt{x}+1)(\sqrt{x^2+4}+2)\sqrt{x-2\sqrt{x}+1}}{x[(\sqrt{x})^3-1]} = \frac{x^2|\sqrt{x}-1|}{x(\sqrt{x}-1)}$$

$$A \geq 0 \Leftrightarrow x(\sqrt{x}-1) > 0 \Leftrightarrow \sqrt{x} - 1 > 0 \Leftrightarrow x > 1$$

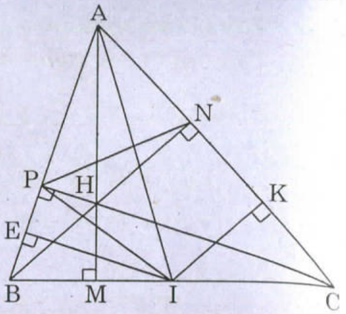
Vậy $A \geq 0$ khi và chỉ khi $x > 1$.

Câu 4.

a) Vì I là trung điểm của BC, để ý tới hai tam giác vuông BPC và BNC, ta có : $IN = IP = \frac{1}{2}BC \Rightarrow \Delta INP$ cân tại I

Mặt khác B, P, N, C nằm trên đường tròn tâm I, đường kính BC nên $\widehat{PIN} = 2\widehat{PBN} = 60^0$.

Suy ra ΔINP là tam giác đều.



b) Ta có : $\widehat{AEI} = \widehat{AKI} = \widehat{AMI} = 90^0$

Suy ra bốn điểm I, M, E, K cùng nằm trên đường tròn đường kính AI.

c) Theo đề bài, thì AI là phân giác của góc $\widehat{BAC} = 60^0$. Mặt khác I là trung điểm của BC, suy ra ΔABC là tam giác đều $\Rightarrow \widehat{BCP} = 30^0$.

Câu 5. Gọi x là số công nhân ban đầu của tổ A ($x \in \mathbb{N}^*$); y là số công nhân ban đầu của tổ B ($y \in \mathbb{N}^*$).

Mỗi ngày tổ A may được số sản phẩm là : 20x (sản phẩm)

Mỗi ngày tổ B may được số sản phẩm là : 20y (sản phẩm)

Sau 6 ngày số sản phẩm tổ A may được là : 20x.6 = 120x (sản phẩm)

Số công nhân của tổ A sau khi tăng thêm 10 người là : x + 10 (người)

Lúc này số sản phẩm mỗi ngày tổ A may được là : 20(x + 10) (sản phẩm)

Sản phẩm mà tổ A phải may (sau khi đã may được 6 ngày) là :

$$16800 - 120x \text{ (sản phẩm)}$$

Thời gian để may số sản phẩm trên là : $\dfrac{16800 - 120x}{20(x+10)}$ (ngày)

Thời gian tổ B may là : $\dfrac{16500}{20y}$ (ngày)

Theo đề, ta có phương trình : $6 + \dfrac{16800 - 120x}{20(x+10)} = \dfrac{16500}{20y}$ (1)

Thời gian tổ A may, nếu được tăng thêm người ngay từ đầu là :

$$\frac{16800}{20(x+10)} \text{ (ngày)}$$

Theo đề, ta có phương trình : $\dfrac{16800}{20(x+10)} + 1 = \dfrac{16500}{20y}$ (2)

Giải hệ (1) và (2), ta được : x = 50, y = 55 (thỏa điều kiện)

Vậy số công nhân ban đầu của tổ A là 50 người, tổ B là 55 người.

ĐỀ 77

ĐỀ THI TUYỂN SINH VÀO LỚP 10 THPT CHU VĂN AN VÀ THPT HÀ NỘI – AMSTERDAM (CHUYÊN KHOA HỌC TỰ NHIÊN)

NĂM HỌC 2007 – 2008

Câu 1. Cho phương trình $x^2 - 3y^2 + 2xy - 2x - 10y + 4 = 0$ (1)

1. Tìm nghiệm (x; y) của phương trình (1) thỏa mãn $x^2 + y^2 = 10$.
2. Tìm nghiệm nguyên của phương trình (1).

Câu 2. Cho điểm A di chuyển trên đường tròn tâm O đường kính BC = 2R (A không trùng với B và C), Trên tia AB lấy điểm M sao cho B là trung điểm của AM. Gọi H là hình chiếu vuông góc của A lên BC và I là trung điểm của HC.

1. Chứng minh rằng M chuyển động trên một đường tròn cố định.
2. Chứng minh rằng $\Delta AHM \backsim \Delta CIA$.
3. Chứng minh rằng MH vuông góc với AI.
4. MH cắt đường tròn (O) tại E và F, AI cắt đường tròn (O) tại điểm thứ hai G. Chứng minh rằng tổng các bình phương các cạnh của tứ giác AEGF không đổi.

Câu 3. Tìm số nhỏ nhất trong các số nguyên dương là bội của 2007 và có bốn chữ số cuối cùng là 2008.

Câu 4. Cho một lưới vuông kích thước 5 × 5. Người ta điền vào mỗi ô của lưới một trong các số –1; 0; 1. Xét tổng của các số được tính theo từng cột, theo từng hàng và theo từng đường chéo. Chứng minh rằng trong tất cả các tổng đó luôn tồn tại hai tổng có giá trị bằng nhau.

Câu 5. Tính tổng sau theo n ($n \in \mathbb{N}^*$) :

$$S = 2^{n-1} + 2.2^{n-2} + 3.2^{n-3} + \ldots + (n-1).2 + n.$$

BÀI GIẢI

Câu 1.

1. Ta có : $x^2 + y^2 = 10 \Rightarrow x^2 = 10 - y^2$ thay vào phương trình (1), ta được :

$$2y^2 + (5 - x)y + (x - 7) = 0 \qquad (2)$$

Giải phương trình (2) theo ẩn y, ta được : $y = 1$; $y = \dfrac{x-7}{2}$

– Với $y = 1 \Rightarrow x^2 = 10 - y^2 = 9 \Leftrightarrow x = \pm 3$

– Với $y = \dfrac{x-7}{2} \Rightarrow 5x^2 - 14x + 9 = 0 \Leftrightarrow x = 1, x = \dfrac{9}{5} \Rightarrow y = -3, y = \dfrac{-13}{5}$

Vậy phương trình đã cho có bốn nghiệm (x; y) là :

$$(3; 1), (-3; 1), (1; -3), \left(\frac{9}{5}; \frac{-13}{5}\right).$$

2. (1) $\Leftrightarrow (x + 3y + 1)(x - y - 3) = -7$

Do $x, y \in \mathbb{Z}$ nên xảy ra các trường hợp sau :

– Trường hợp 1 : $\begin{cases} x + 3y + 1 = 1 \\ x - y - 3 = -7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -3 \\ y = 1 \end{cases}$

– Trường hợp 2 : $\begin{cases} x + 3y + 1 = -1 \\ x - y - 3 = 7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 7 \\ y = -3 \end{cases}$

- Trường hợp 3 : $\begin{cases}x+3y+1=7\\x-y-3=-1\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x=3\\y=1\end{cases}$
- Trường hợp 4 : $\begin{cases}x+3y+1=-7\\x-y-3=1\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x=1\\y=-3\end{cases}$

Vậy các nghiệm nguyên (x; y) của phương trình đã cho là :

(–3; 1), (7; –3), (3; 1), (1; –3).

Câu 2.

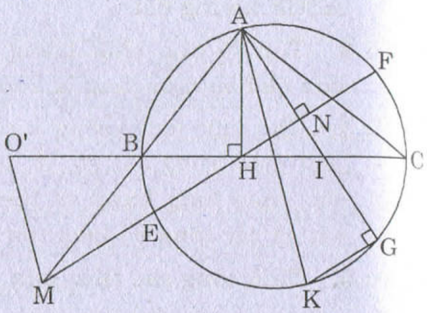
1. Lấy O' đối xứng với O qua B, thì O' cố định. Kết hợp với đề cho B là trung điểm của MA nên O'M = OA = R. Do đó M chuyển động trên đường tròn (O'; R) cố định.
2. Ta có tam giác ABC vuông ở A nên :

$\widehat{MAH} = \widehat{ACI}$ (1)

Và $\dfrac{AC}{HC} = \dfrac{AB}{AH} \Rightarrow \dfrac{AC}{CI} = \dfrac{AM}{AH}$ (2)

Từ (1) và (2), suy ra :

$\Delta AHM \backsim \Delta CIA$ (c-g-c)



3. Gọi N là giao điểm của HM với AI.

Ta có : $\Delta AHM \backsim \Delta CIA$ (phần 2)

$\Rightarrow \widehat{AMH} = \widehat{CAI} \Rightarrow \widehat{AMN} + \widehat{NAM} = \widehat{CAI} + \widehat{NAM} = 90^0$

Vậy MH ⊥ AI.

4. Kẻ đường kính AK, ta có : $\widehat{AGK} = 90^0$. Kết hợp với phần 3), suy ra : KG // EF.

Tứ giác EKGF là hình thang nội tiếp đường tròn (O) nên nó là hình thang cân.

Do đó : $GF = EK \Rightarrow AE^2 + GF^2 = AE^2 + EK^2 = AK^2 = 4R^2$

Tương tự, ta được : $EG^2 + FA^2 = 4R^2$

Vậy $AE^2 + GF^2 + EG^2 + FA^2 = 8R^2$ không đổi.

Câu 3. Gọi số cần tìm là 10000A + 2008 (với $A \in \mathbb{N}$).

Ta có : $(10000A + 2008) \vdots 2007 \Leftrightarrow 1972A + 1 \vdots 2007$

$\Leftrightarrow 1972A + 1 = 2007k,\ k \in \mathbb{N}^* \quad \Rightarrow A = \dfrac{2007k - 1}{1972} = k + \dfrac{35k - 1}{1972}$

Do $A \in \mathbb{N}$ nên $35k - 1 = 1972m$, với $m \in \mathbb{N}^*$

Từ đó ta được m = 32 là số nhỏ nhất thỏa mãn, khi đó A = 1835.

Vì số cần tìm là nhỏ nhất khi A nhỏ nhất, dẫn đến m là nhỏ nhất.

Vậy số nhỏ nhất cần tìm là 18352008.

Câu 4. Rõ ràng có tất cả 12 tổng (5 cột, 5 hàng, 2 đường chéo). Do chọn điền vào ô các số –1; 0; 1 nên giá trị mỗi tổng S là số nguyên thỏa mãn $-5 \le S \le 5$.

Vậy S có thể nhận 11 giá trị.

Theo nguyên lí Dirichlet tồn tại hai tổng có giá trị bằng nhau.

Câu 5. Ta có : $2S = 2^n + 2.2^{n-1} + 3.2^{n-2} + \ldots + (n-1)2^2 + 2n$

$\Rightarrow 2S - S = 2^n + 2^{n-1} + 2^{n-2} + \ldots + 2^2 + 2 - n$

Hay $S = 2(2^n - 1) - n = 2^{n+1} - (n+2)$.

ĐỀ 78

ĐỀ THI TUYỂN SINH VÀO LỚP 10 THPT CHUYÊN TP. HCM
NĂM HỌC 2007 – 2008

Câu 1.

a) Chứng minh với mọi số thực x, y, z, t ta luôn có bất đẳng thức sau :

$$x^2 + y^2 + z^2 + t^2 \ge x(y + z + t)$$

Đẳng thức xảy ra khi nào ?

b) Chứng minh với mọi số thực a, b khác 0 ta luôn có bất đẳng thức sau :

$$\frac{a^2}{b^2} + \frac{b^2}{a^2} + 4 \ge 3\left(\frac{a}{b} + \frac{b}{a}\right).$$

Câu 2. Tìm nghiệm nguyên x, y của phương trình sau : $x^2 - xy = 6x - 5y - 8$.

Câu 3. Cho hệ phương trình $\begin{cases}x^2 + y^2 + 2x + 2y = 11\\xy(x+2)(y+2) = m\end{cases}$

a) Giải hệ phương trình khi m = 24.

b) Tìm m để hệ phương trình có nghiệm.

Câu 4. Cho $\left(x + \sqrt{x^2 + 2007}\right)\left(y + \sqrt{y^2 + 2007}\right) = 2007$. Tính S = x + y.

Câu 5. Cho a, b là các số nguyên dương sao cho $\dfrac{a+1}{a} + \dfrac{b+1}{b}$ cũng là số nguyên. Gọi d là ước số chung của a và b. Chứng minh $d \le \sqrt{a+b}$.

Câu 6. Cho tam giác ABC có ba góc nhọn nội tiếp trong đường tròn (O) (AB < AC). Các tiếp tuyến với (O) tại B và C cắt nhau tại N. Vẽ dây AM song song với BC. Đường thẳng MN cắt đường tròn (O) tại P.

a) Cho biết $\dfrac{1}{OB^2} + \dfrac{1}{NC^2} = \dfrac{1}{16}$, tính độ dài đoạn BC.

b) Chứng minh $\dfrac{BP}{AC} = \dfrac{CP}{AB}$.

c) Chứng minh BC, ON và AP đồng quy.

BÀI GIẢI

Câu 1.

a) $\quad x^2 + y^2 + z^2 + t^2 \ge x(y + z + t)$ (1)

$\Leftrightarrow 4x^2 + 4y^2 + 4z^2 + 4t^2 \ge 4x(y + z + t)$

$\Leftrightarrow (x^2 - 4xy + 4y^2) + (x^2 - 4xz + 4z^2) + (x^2 - 4xt + 4t^2) + x^2 \geq 0$

$$\Leftrightarrow (x - 2y)^2 + (x - 2z)^2 + (x - 2t)^2 + x^2 \geq 0 \qquad (2)$$

Bất đẳng thức (1) đúng với mọi x, y, z và t.

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi :

$$x - 2y = x - 2z = x - 2t = x = 0 \Leftrightarrow x = y = z = t = 0$$

b) Đặt $t = \dfrac{a}{b} + \dfrac{b}{a}$

Ta có : $|t| = \left|\dfrac{a}{b} + \dfrac{b}{a}\right| = \left|\dfrac{a}{b}\right| + \left|\dfrac{b}{a}\right| \geq 2$

$$\frac{a^2}{b^2} + \frac{b^2}{a^2} + 4 \geq 3\left(\frac{a}{b} + \frac{b}{a}\right) \Leftrightarrow t^2 + 2 \geq 3t \Leftrightarrow (t - 1)(t - 2) \geq 0 \qquad (3)$$

Nếu $t \geq 2$ thì $t - 1 \geq 0$ và $t - 2 \geq 0$ nên bất đẳng thức (3) đúng

Nếu $t \leq -2$ thì $t - 1 < 0$ và $t - 2 < 0$ nên bất đẳng thức (3) đúng

Vậy với mọi số thực a, b khác 0 ta luôn có : $\dfrac{a^2}{b^2} + \dfrac{b^2}{a^2} + 4 \geq 3\left(\dfrac{a}{b} + \dfrac{b}{a}\right)$.

Câu 2. $x^2 - xy = 6x - 5y - 8 \Leftrightarrow x^2 - 6x + 8 = (x - 5)y \qquad (1)$

$\Leftrightarrow y = \dfrac{x^2 - 6x + 8}{x - 5}$ (vì x = 5 không phải là nghiệm của phương trình (1))

$$\Leftrightarrow y = x - 1 + \frac{3}{x - 5}$$

Vì x, y nguyên nên $x - 5 \in \{-1; 1; 3; -3\}$ hay $x \in \{4; 6; 8; 2\}$

- Với x = 2 thì y = 0
- Với x = 4 thì y = 0
- Với x = 6 thì y = 8
- Với x = 8 thì y = 8

Vậy phương trình đã cho có các nghiệm nguyên (x; y) là :

(2; 0), (4; 0), (6; 8) và (8; 8).

Câu 3.

a) Khi m = 24, hệ phương trình đã cho trở thành : $\begin{cases} x^2 + y^2 + 2x + 2y = 11 \\ xy(x + 2)(y + 2) = 24 \end{cases}$

Đặt $u = x^2 + 2x = (x + 1)^2 - 1 \geq 1$

$v = y^2 + 2y = (y + 1)^2 - 1 \geq 1$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} u + v = 11 \\ uv = 24 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u = 3 \\ v = 8 \end{cases} \vee \begin{cases} u = 8 \\ v = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x + 1)^2 = 4 \\ (y + 1)^2 = 9 \end{cases} \vee \begin{cases} (x + 1)^2 = 9 \\ (y + 1)^2 = 4 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = \pm 2 - 1 \\ y = \pm 3 - 1 \end{cases} \vee \begin{cases} x = \pm 3 - 1 \\ y = \pm 2 - 1 \end{cases}$$

Vậy khi m = 24 thì hệ phương trình đã cho có nghiệm (x; y) là :

(1; 2), (1; –4), (–3; 2), (–3; –4), (2; 1), (2; –3), (–4; 1) và (–4; –3).

b) Đặt $u = x^2 + 2x + 1 = (x + 1)^2 \geq 0$

$v = y^2 + 2y + 1 = (y + 1)^2 \geq 0$

Hệ phương trình đã cho trở thành :

$$\begin{cases} u + v = 13 \\ (u - 1)(v - 1) = m \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u + v = 13 \\ uv - (u + v) + 1 = m \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u + v = 13 \\ uv = m + 12 \end{cases}$$

Do đó u, v là nghiệm của phương trình $x^2 - 13x + m + 12 = 0 \qquad (*)$

Hệ đã cho có nghiệm khi và chỉ khi (*) có 2 nghiệm $x_1, x_2 \geq 0$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta \geq 0 \\ S \geq 0 \\ P \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 121 - 4m \geq 0 \\ m + 12 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \leq \dfrac{121}{4} \\ m \geq -12 \end{cases} \Leftrightarrow -12 \leq m \leq \frac{121}{4}.$$

Câu 4. Ta có : $\left(x + \sqrt{x^2 + 2007}\right)\left(-x + \sqrt{x^2 + 2007}\right) = 2007 \qquad (1)$

$$\left(y + \sqrt{y^2 + 2007}\right)\left(-y + \sqrt{y^2 + 2007}\right) = 2007 \qquad (2)$$

Từ (1), (2) và kết hợp với đề bài, ta được :

$$2007\left(-x + \sqrt{x^2 + 2007}\right)\left(-y + \sqrt{y^2 + 2007}\right) = 2007^2$$

$$\Leftrightarrow \left(-x + \sqrt{x^2 + 2007}\right)\left(-y + \sqrt{y^2 + 2007}\right) = 2007$$

$$\Leftrightarrow xy - x\sqrt{y^2 + 2007} - y\sqrt{x^2 + 2007} + \sqrt{(x^2 + 2007)(y^2 + 2007)} = 2007 \qquad (3)$$

Và từ đề bài, suy ra :

$$xy + x\sqrt{y^2 + 2007} + y\sqrt{x^2 + 2007} + \sqrt{(x^2 + 2007)(y^2 + 2007)} = 2007 \qquad (4)$$

Từ (3) và (4), suy ra :

$$xy + \sqrt{(x^2 + 2007)(y^2 + 2007)} = 2007$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{(x^2 + 2007)(y^2 + 2007)} = 2007 - xy$$

$$\Leftrightarrow x^2y^2 + 2007(x^2 + y^2) + 2007^2 = 2007^2 - 2.2007xy + x^2y^2$$

$$\Leftrightarrow x^2 + y^2 = -2xy \Leftrightarrow (x + y)^2 = 0 \Leftrightarrow S = 0$$

Vậy $S = x + y = 0$

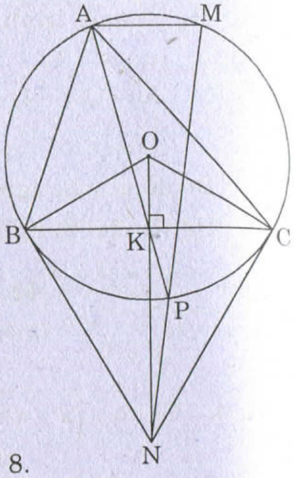
Câu 5. Ta có : $\dfrac{a + 1}{a} + \dfrac{b + 1}{b} = 2 + \dfrac{a + b}{ab}$ là số nguyên

Suy ra : $\dfrac{a + b}{ab}$ là số nguyên $\Rightarrow \dfrac{a + b}{ab} \geq 1 \Rightarrow a + b \geq ab$

Mà $a \geq d > 0$ và $b \geq d > 0$

Suy ra : $a + b \geq ab \geq d^2 \Rightarrow \sqrt{a+b} \geq d$ (đpcm).

Câu 6.



a) Ta có : NB = NC (tính chất hai tiếp tuyến cắt nhau)

và OB = OC = R

Do đó ON là trung trực của BC.

Gọi K là giao điểm của ON và BC, ta có :

$$BK = KC$$

Tam giác OBN vuông tại B và có BK là đường cao nên :

$$\frac{1}{OB^2} + \frac{1}{NC^2} = \frac{1}{OB^2} + \frac{1}{NB^2} = \frac{1}{BK^2} \qquad (1)$$

Mà theo đề bài, ta có : $\frac{1}{OB^2} + \frac{1}{NC^2} = \frac{1}{16}$ (2)

Từ (1) và (2), suy ra : $BK^2 = 16 \Rightarrow BK = 4$

$\Rightarrow BC = 2BK = 8.$

b) Ta có : $\Delta NBP \backsim \Delta NMB$ (g-g) $\Rightarrow \frac{PB}{MB} = \frac{NB}{NM}$ (1)

$\Delta NCP \backsim \Delta NMC$ (g-g) $\Rightarrow \frac{PC}{MC} = \frac{NC}{NM}$ (2)

Và NB = NC (3)

Từ (1), (2) và (3), suy ra : $\frac{PB}{MB} = \frac{PC}{MC}$ (4)

Mặt khác AM // BC nên tứ giác AMCB là hình thang cân.

Do đó MC = AB và MB = AC (5)

Từ (4) và (5), suy ra : $\frac{PB}{AC} = \frac{PC}{AB}$ (đpcm).

c) Gọi Q là giao điểm của AP và BC. Ta cần chứng minh BQ = QC.

Ta có : $\Delta BQP \backsim \Delta AQC$ (g-g) $\Rightarrow \frac{BQ}{AQ} = \frac{PB}{AC}$ (6)

$\Delta CQP \backsim \Delta AQB$ (g-g) $\Rightarrow \frac{CQ}{AQ} = \frac{CP}{AB}$ (7)

Từ (6), (7) và kết hợp với kết quả phần a), ta được :

$$\frac{BQ}{AQ} = \frac{CQ}{AQ} \Rightarrow BQ = CQ$$

Do đó Q là trung điểm của BC nên Q trùng với K.

Vậy BC, ON và AP đồng quy tại K.

ĐỀ 79

ĐỀ THI TUYỂN SINH VÀO LỚP 10 CHUYÊN ĐH KHTN HÀ NỘI NĂM HỌC 2007 – 2008

Câu 1.

1. Giải phương trình $\sqrt{4x^2-1} + \sqrt{x} = \sqrt{2x^2-x} + \sqrt{2x+1}$.
2. Giải hệ phương trình $\begin{cases} xy(x+y) = 2 \\ x^3 + y^3 + x + y = 4 \end{cases}$

Câu 2.

1. Giả sử x_1, x_2 là hai nghiệm của phương trình $x^2 - 4x + 1 = 0$. Chứng minh rằng $x_1^5 + x_2^5$ là một số nguyên.
2. Với a, b là các số nguyên dương sao cho a + 1 và b + 2007 chia hết cho 6. Chứng minh rằng : $4^a + a + b$ chia hết cho 6.

Câu 3. Cho đường tròn tâm O và hai điểm A, B cố định thuộc đường tròn đó (AB không phải là đường kính). Gọi M là trung điểm của cung nhỏ $\overset{\frown}{AB}$. Trên đoạn AB lấy hai điểm C, D phân biệt và không nằm trên đường tròn. Các đường thẳng MC, MD cắt đường tròn đã cho tương ứng tại E, F khác M.

1. Chứng minh rằng bốn điểm C, D, E, F cùng nằm trên một đường tròn.
2. Gọi O_1, O_2 tương ứng là tâm các đường tròn ngoại tiếp tam giác ACE và BDF. Chứng minh rằng khi C, D thay đổi trên đoạn AB các đường thẳng AO_1 và BO_2 luôn cắt nhau tại một điểm cố định.

Câu 4. Với các số a, b, c là các số thực dương thỏa điều kiện abc = 1.

Chứng minh rằng : $\frac{a}{(ab+a+1)^2} + \frac{b}{(bc+b+1)^2} + \frac{c}{(ca+c+1)^2} \geq \frac{1}{a+b+c}$.

BÀI GIẢI

Câu 1.

1. Điều kiện : $x \geq \frac{1}{2}$

Phương trình đã cho tương đương với :

$$\sqrt{2x+1}\left(\sqrt{2x-1}-1\right) - \sqrt{x}\left(\sqrt{2x-1}-1\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow \left(\sqrt{2x-1}-1\right)\left(\sqrt{2x+1}-\sqrt{x}\right) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \sqrt{2x-1}-1=0 \\ \sqrt{2x+1}-\sqrt{x}=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1 \\ x = -1 \text{ (loại)} \end{array}\right.$$

Vậy nghiệm của phương trình đã cho là x = 1.

2. $\begin{cases} xy(x+y) = 2 & (1) \\ x^3 + y^3 + x + y = 4 & (2) \end{cases}$

(2) $\Leftrightarrow (x+y)^3 - 3xy(x+y) + x + y = 4 \Leftrightarrow (x+y)^3 + (x+y) - 10 = 0$

Đặt u = x + y $\Leftrightarrow u^3 + u - 10 = 0 \Leftrightarrow (u-2)(u + 2u + 5) = 0$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}(u-2) = 0 \Rightarrow u = 2\\ (u + 2u + 5) = 0 \text{ (vô nghiệm)}\end{array}\right.$$

Kết hợp với (1), ta có hệ $\begin{cases}x + y = 2\\ xy = 1\end{cases} \Rightarrow x = y = 1$

Vậy hệ đã cho có nghiệm (x; y) là (1; 1).

Câu 2.

1. Theo đề bài, ta có : $\begin{cases}x_1 + x_2 = 4\\ x_1x_2 = 1\end{cases}$

$\Leftrightarrow x_1^2 + x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2 = 14$

$\Leftrightarrow x_1^3 + x_2^3 = (x_1 + x_2)^3 - 3x_1x_2(x_1 + x_2) = 52$

$\Leftrightarrow x_1^5 + x_2^5 = (x_1^3 + x_2^3)(x_1^2 + x_2^2) - (x_1x_2)^2(x_1 + x_2) = 724$

Vậy $x_1^5 + x_2^5$ là một số nguyên.

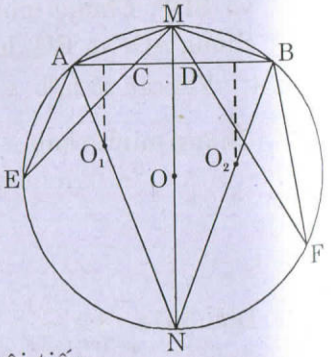
2. Ta có : $4^a + a + b = (4^a + 2) + (a + 1) + (b + 2007) - 2010$

$4^a + 2 = (4^a - 1) + 3 = (4 - 1)(4^{a-1} + ... + 4 + 1) + 3 \vdots 3$

Mặt khác : $4^a + 2$ là số chẵn, suy ra $4^a + 2 \vdots 6$

$4^a + a + b$ là tổng của các số hạng đều chia hết cho 6 (đpcm).

Câu 3.



1. Xét tứ giác CEFD có :

- $\widehat{CEF}$ chắn cung $\overset{\frown}{MBF}$ (1)
- $\widehat{BDF}$ có đỉnh D nằm trong đường tròn nên :

$\widehat{BDF} = \frac{1}{2}sđ(\overset{\frown}{AM} + \overset{\frown}{BF}) = \frac{1}{2}sđ(\overset{\frown}{MB} + \overset{\frown}{MF})$

$= \frac{1}{2}sđ\overset{\frown}{MBF}$ (2)

Từ (1) và (2), suy ra : $\widehat{CEF} = \widehat{BDF}$

Do đó : $\widehat{CEF} + \widehat{CDF} = 180^0 \Rightarrow$ tứ giác CEFD nội tiếp

Vậy bốn điểm C, D, E, F cùng nằm trên một đường tròn.

2. Vì $\widehat{MAB} = \widehat{AEM}$ (chắn hai cung bằng nhau) nên ta có MA tiếp xúc với đường tròn ngoại tiếp tam giác ACE, suy ra MA ⊥ AO_1. Do đó nếu kéo dài AO_1 cắt đường tròn (O) tại N thì MN là đường kính của đường tròn (O). Do đó M cố định, suy ra N cố định.

Tương tự MB tiếp xúc với đường tròn ngoại tiếp tam giác BDF nên BO_2 phải đi qua N.

Vậy khi C, D thay đổi trên đoạn AB các đường thẳng AO_1 và BO_2 luôn cắt nhau tại một điểm cố định.

Câu 4. Ta có : $\frac{a}{ab + a + 1} + \frac{b}{bc + b + 1} + \frac{c}{ca + c + 1}$

$$= \frac{a}{ab + a + 1} + \frac{ab}{abc + ab + a} + \frac{abc}{a^2bc + abc + ab}$$

$$= \frac{a}{ab + a + 1} + \frac{ab}{ab + a + 1} + \frac{1}{ab + a + 1} = 1$$

Áp dụng bất đẳng thức Bu-nhi-a-cốp-ski với a, b, c, x, y, z > 0, ta được :

$$(x + y + z)^2 = \left(\sqrt{a}.\frac{x}{\sqrt{a}} + \sqrt{b}.\frac{y}{\sqrt{b}} + \sqrt{c}.\frac{z}{\sqrt{c}}\right)^2 \leq (a + b + c)\left(\frac{x^2}{a} + \frac{y^2}{b} + \frac{z^2}{c}\right)$$

$$\Rightarrow \frac{x^2}{a} + \frac{y^2}{b} + \frac{z^2}{c} \geq \frac{(x + y + z)^2}{a + b + c}$$

Ta có : $\frac{a}{(ab + a + 1)^2} + \frac{b}{(bc + b + 1)^2} + \frac{c}{(ca + c + 1)^2}$

$$= \frac{\left(\frac{a}{ab + a + 1}\right)^2}{a} + \frac{\left(\frac{b}{bc + b + 1}\right)^2}{c} + \frac{\left(\frac{c}{ca + c + 1}\right)^2}{c}$$

$$\geq \frac{\left(\frac{a}{ab + a + 1} + \frac{b}{bc + b + 1} + \frac{c}{ca + c + 1}\right)^2}{a + b + c} = \frac{1}{a + b + c} \text{ (đpcm).}$$

ĐỀ 80

ĐỀ THI TUYỂN SINH VÀO LỚP 10 ĐH KHTN HÀ NỘI (CHUYÊN TOÁN – TIN) NĂM HỌC 2007 – 2008

Câu 1.

1. Giải hệ phương trình $\begin{cases}x^2 + 4y^2 = 5\\ 4xy + x + 2y = 7\end{cases}$

2. Giả sử a, b, c là các số thực dương thỏa mãn điều kiện $b^2 + c^2 \leq a^2$.

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = \frac{1}{a^2}(b^2 + c^2) + a^2\left(\frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}\right)$.

Câu 2.

1. Tìm nghiệm nguyên của phương trình $5x^2 + y^2 = 17 + 2xy$.

2. Tìm tất cả các số nguyên tố p mà $p^4 + 2$ cũng là số nguyên tố.

Câu 3. Cho hai đường thẳng Δ_1 và Δ_2 vuông góc với nhau tại O, về một phía Δ_1 vẽ hai đường tròn : đường tròn (O_1) tiếp xúc Δ_1 và Δ_2 tương ứng tại A, B; đường tròn (O_2) tiếp xúc Δ_1 và Δ_2 tương ứng tại C và D, (O_1) và (O_2) nằm về hai phía của Δ_2 và OB < OD.

1. Chứng minh rằng B là trực tâm của tam giác DAC.
2. Đường thẳng AD cắt (O_2) tại E khác D; đường thẳng BC cắt (O_1) tại F khác B. Chứng minh rằng tứ giác ACEF là hình thang cân.

Câu 4. Trong tứ giác lồi có độ dài ba cạnh bằng nhau và bằng a (a là số dương cho trước), hãy tìm tứ giác có diện tích lớn nhất.

Câu 5. Cho dãy số $a_0, a_1, ..., a_n, ...$ được xác định bởi công thức : $a_0 = 0$; $\sqrt{a_{n+1}} = 2\sqrt{a_n} + \sqrt{3(1 + a_n)}$ với mọi số nguyên không âm.

Chứng minh rằng : $a_n = \frac{1}{4}\left[\left(2 + \sqrt{3}\right)^n - \left(2 - \sqrt{3}\right)^n\right]^2$.

BÀI GIẢI

Câu 1.

1. $\begin{cases} x^2 + 4y^2 = 5 & (1) \\ 4xy + x + 2y = 7 & (2) \end{cases}$

Lấy (1) + (2), ta được : $(x + 2y)^2 + (x + 2y) = 12 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x + 2y = 3 \\ x + 2y = -4 \end{array}\right.$

$$\text{(I)}\begin{cases} x + 2y = 3 \\ 4xy + x + 2y = 7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + 2y = 3 \\ xy = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 1 \end{cases}; \begin{cases} x = 2 \\ y = \dfrac{1}{2} \end{cases}$$

$$\text{(II)}\begin{cases} x + 2y = -4 \\ 4xy + x + 2y = 7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + 2y = -4 \\ 4xy = 11 \end{cases} \text{(vô nghiệm)}$$

Vậy hệ phương trình đã cho có nghiệm (x; y) là : (1; 1) và $\left(2; \frac{1}{2}\right)$.

2. Ta có bất đẳng thức $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} \geq \frac{4}{x + y}$ với x, y > 0

Áp dụng bất đẳng thức trên, ta được :

$$P = \frac{1}{a^2}\left(b^2 + c^2\right) + a^2\left(\frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}\right) \geq \frac{b^2 + c^2}{a^2} + \frac{4a^2}{b^2 + c^2}$$

$$= \frac{b^2 + c^2}{a^2} + \frac{a^2}{b^2 + c^2} + \frac{3a^2}{b^2 + c^2} \geq 2\sqrt{\frac{b^2 + c^2}{a^2}.\frac{a^2}{b^2 + c^2}} + 3 = 5$$

Vậy giá trị nhỏ nhất của P là 5, đạt được khi $b^2 + c^2 = a^2$ và b = c.

Câu 2.

1. $5x^2 + y^2 = 17 + 2xy \Leftrightarrow (x - y)^2 + 4x^2 = 17$

$x^2 \leq \frac{17}{4} \Rightarrow x \in \{0; 1; 4\}$

- $x^2 = 0 \Rightarrow (x - y)^2 = 17$ (loại)
- $x^2 = 1 \Rightarrow (x - y)^2 = 13$ (loại)
- $x^2 = 4 \Rightarrow (x - y)^2 = 1$

Với x = 2, ta có : $(2 - y)^2 = 1 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y = 1 \\ y = 3 \end{array}\right.$

Với x = –2, ta có : $(-2 - y)^2 = 1 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y = -1 \\ y = -3 \end{array}\right.$

Vậy phương trình có 4 nghiệm nguyên (x; y) là :

(2; 1); (2; 3); (–2; –1); (–2; –3).

2. Ta biểu diễn p dưới dạng 3k, 3k + 1 và 3k + 2.

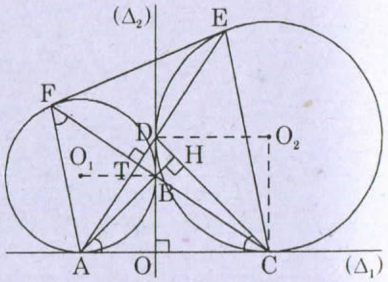
– Nếu $p = 3k + 1 \Rightarrow p^4 + 2 = (3k + 1)^4 + 2 \vdots 3 \Rightarrow p^4 + 2$ không phải là số nguyên tố.

– Nếu $p = 3k + 2 \Rightarrow p^4 + 2 = (3k + 2)^4 + 2 \vdots 3 \Rightarrow p^4 + 2$ không phải là số nguyên tố.

– Nếu p = 3k, vì p là số nguyên tố, suy ra p = 3, khi đó $p^4 + 2 = 81 + 2 = 83$.

Vậy p = 3 là nghiệm duy nhất.

Câu 3.



1. Kéo dài AB cắt CD tại H.

Ta có : $\widehat{BAC} = \widehat{DCA} = 45^0 \Rightarrow \widehat{AHC} = 90^0$

Do đó B là trực tâm của tam giác DAC.

2. Ta có : $\widehat{AFC} = \widehat{AEC} = 45^0$ hay E, F cùng nhìn AC dưới một góc 45^0.

Suy ra tứ giác ACEF nội tiếp.

Gọi T là giao điểm của CB và AE.

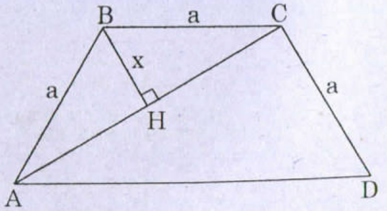
Mặt khác vì B là trực tâm của tam giác DAC nên $\widehat{FTA} = 90^0$

Do $\widehat{TFA} = 45^0 \Rightarrow \widehat{TAF} = 45^0$

Từ $\widehat{TAF} = \widehat{AEC} = 45^0 \Rightarrow$ AF // CE

Tứ giác ACEF có AF // CE nên là hình thang cân.

Câu 4. Giả sử tứ giác lồi ABCD có : AB = BC = CD = a



Kẻ BH vuông góc với AC, đặt BH = x (0 < x < a).

Khi đó, ta có : $AH = HC = \sqrt{a^2 - x^2}$

Do đó : $S_{\Delta ABC} = BH.AH = x\sqrt{a^2 - x^2}$

$$S_{\Delta ACD} \leq \frac{AC.CD}{2} = a\sqrt{a^2 - x^2}$$

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $\widehat{ACD} = 90^0$.

Ta có : $S_{ABCD} = S_{\Delta ABC} + S_{\Delta ACD} = (a + x)\sqrt{a^2 - x^2} = \sqrt{(a + x)^2(a^2 - x^2)}$

$$= \sqrt{(a + x)^3(a - x)} = \sqrt{\frac{1}{3}(a + x)^3(3a - 3x)}$$

$$= \sqrt{\frac{1}{3}(a + x)(a + x)(a + x)(3a - 3x)}$$

$$\le \sqrt{\frac{1}{3}\left(\frac{a + x + a + x + a + x + 3a - 3x}{4}\right)^4} = \sqrt{\frac{1}{3}\left(\frac{3a}{2}\right)^4} = \frac{3\sqrt{3}}{4}a^2$$

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi :

$$\begin{cases} a + x = 3a - 3x \\ \widehat{ACD} = 90^0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{a}{2} \\ \widehat{ACD} = 90^0 \end{cases} \Rightarrow \widehat{ABH} = 60^0 \Leftrightarrow \widehat{ABC} = 120^0$$

Do $\widehat{BCA} = 30^0$ và $\widehat{ACD} = 90^0$, suy ra $\widehat{BCD} = 120^0$

Vậy S_{ABCD} lớn nhất bằng $\frac{3\sqrt{3}}{4}a^2$, đạt được khi $\widehat{ABC} = \widehat{BCD} = 120^0$.

Câu 5. Ta có : $\sqrt{a_{n+1}} = 2\sqrt{a_n} + \sqrt{3(1 + a_n)}$ (1)

$$\Leftrightarrow \quad a_{n+1} = 4a_n + 3 + 3a_n + 4\sqrt{3a_n(1 + a_n)}$$

$$= 4(1 + a_n) + 3a_n + 2\sqrt{4(1 + a_n)3a_n} - 1$$

$$= \left(2\sqrt{1 + a_n} + \sqrt{3a_n}\right)^2 - 1$$

$$\Rightarrow \sqrt{a_{n+1} + 1} = 2\sqrt{1 + a_n} + \sqrt{3a_n} \qquad (2)$$

Từ (1) và (2), suy ra :

$$\sqrt{1 + a_{n+1}} - \sqrt{a_{n+1}} = 2\sqrt{1 + a_n} - \sqrt{3(1 + a_n)} - \left(2\sqrt{a_n} - \sqrt{3a_n}\right)$$

$$= \left(2 - \sqrt{3}\right)\left(\sqrt{1 + a_n} - \sqrt{a_n}\right)$$

$$\Rightarrow \sqrt{1 + a_n} - \sqrt{a_n} = \left(2 - \sqrt{3}\right)\left(\sqrt{1 + a_{n-1}} - \sqrt{a_{n-1}}\right)$$

$$= \left(2 - \sqrt{3}\right)^2\left(\sqrt{1 + a_{n-2}} - \sqrt{a_{n-2}}\right)$$

$$= \left(2 - \sqrt{3}\right)^n\left(\sqrt{1 + a_0} - \sqrt{a_0}\right) = \left(2 - \sqrt{3}\right)^n \qquad (3)$$

Tương tự : $\sqrt{1 + a_{n+1}} + \sqrt{a_{n+1}} = 2\sqrt{1 + a_n} + \sqrt{3(2 + a_n)} + 2\sqrt{a_n} + \sqrt{3a_n}$

$$= \left(2 + \sqrt{3}\right)\left(\sqrt{1 + a_n} + \sqrt{a_n}\right)$$

$$\Rightarrow \sqrt{1 + a_n} + \sqrt{a_n} = \left(2 + \sqrt{3}\right)^n \qquad (4)$$

Từ (3) và (4), suy ra :

$$2\sqrt{a_n} = \left(2 + \sqrt{3}\right)^n - \left(2 - \sqrt{3}\right)^n \Rightarrow a_n = \frac{1}{4}\left[\left(2 + \sqrt{3}\right)^n - \left(2 - \sqrt{3}\right)^n\right]^2 \text{ (đpcm)}.$$

CÁC ĐỀ THI TUYỂN SINH VÀO LỚP 10 THPT NĂM HỌC 2011 - 2012

A. ĐỀ BÀI

ĐỀ THI TUYỂN SINH VÀO LỚP 10 THPT TP. HÀ NỘI

Bài 1. *(2,5đ)* Cho $A = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x} - 5} - \frac{10\sqrt{x}}{x - 25} - \frac{5}{\sqrt{x} + 5}$, với $x \ge 0$ và $x \ne 25$.

1. Rút gọn biểu thức A.
2. Tính giá trị của A khi x = 9.
3. Tìm x để $A < \frac{1}{3}$.

Bài 2. *(2,5đ)* Giải bài toán sau bằng cách lập phương trình hoặc hệ phương trình :

Một đội xe theo kế hoạch chở hết 140 tấn hàng trong một số ngày quy định. Do mỗi ngày đội đã chở vượt mức 5 tấn nên đội đã hoàn thành kế hoạch sớm hơn thời gian quy định 1 ngày và chở thêm được 10 tấn. Hỏi theo kế hoạch đội xe chở hàng hết bao nhiêu ngày ?

Bài 3. *(1đ)* Cho parabol (P) : $y = x^2$ và đường thẳng (d) : $y = 2x - m^2 + 9$.

1. Tìm tọa độ các giao điểm của parabol (P) và đường thẳng (d) khi m = 1.
2. Tìm m để đường thẳng (d) cắt parabol (P) tại hai điểm nằm về hai phía của trục tung.

Bài 4. *(3,5đ)* Cho đường tròn tâm O, đường kính AB = 2R. Gọi d_1 và d_2 lần lượt là hai tiếp tuyến của đường tròn (O) tại hai điểm A và B. Gọi I là trung điểm của OA và E là điểm thuộc đường tròn (O) (E không trùng với A và B). Đường thẳng d đi qua điểm E và vuông góc với EI cắt hai đường thẳng d_1 và d_2 lần lượt tại M và N.

1. Chứng minh tứ giác AMEI nội tiếp.
2. Chứng minh $\widehat{ENI} = \widehat{EBI}$ và $\widehat{MIN} = 90^o$.
3. Chứng minh AM.BN = AI.BI.
4. Gọi F là điểm chính giữa của cung AB không chứa điểm E của đường tròn (O). Hãy tính diện tích của tam giác MIN theo R khi ba điểm E, I, F thẳng hàng.

Bài 5. *(0,5đ)* Với $x > 0$, tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức :

$$M = 4x^2 - 3x + \frac{1}{4x} + 2011.$$

ĐỀ THI TUYỂN SINH VÀO LỚP 10 THPT TP. ĐÀ NẴNG

Bài 1. *(2đ)* Giải phương trình và hệ phương trình sau :

a) $(2x + 1)(3 - x) + 4 = 0$

b) $\begin{cases} 3x - |y| = 1 \\ 5x + 3y = 11 \end{cases}$

Bài 2. *(1đ)* Rút gọn biểu thức $Q = \left(\dfrac{\sqrt{6} - \sqrt{3}}{\sqrt{2} - 1} + \dfrac{5 - \sqrt{5}}{\sqrt{5} - 1}\right) : \dfrac{2}{\sqrt{5} - \sqrt{3}}$.

Bài 3. *(2đ)* Cho phương trình $x^2 - 2x - 2m^2 = 0$ (m là tham số)

a) Giải phương trình khi $m = 0$.

b) Tìm m để phương trình có hai nghiệm x_1, x_2 khác 0 và thỏa điều kiện $x_1^2 = 4x_2^2$.

Bài 4. *(1,5đ)* Một hình chữ nhật có chu vi bằng 28cm và mỗi đường chéo của nó có độ dài 10cm. Tìm độ dài các cạnh của hình chữ nhật đó.

Bài 5. *(3,5đ)* Cho tam giác đều ABC nội tiếp đường tròn đường kính AD. Gọi M là một điểm di động trên cung nhỏ AB (M không trùng với điểm A và B).

a) Chứng minh rằng MD là phân giác của góc BMC.

b) Cho AD = 2R. Tính diện tích tứ giác ABDC theo R.

c) Gọi K là giao điểm của AB và MD, H là giao điểm của AD và MC. Chứng minh rằng ba đường thẳng AM, BD, HK đồng quy.

ĐỀ THI TUYỂN SINH VÀO LỚP 10 THPT TỈNH BÌNH ĐỊNH

Bài 1. *(2đ)*

a) Giải hệ phương trình : $\begin{cases} 3x - y = 7 \\ 2x + y = 8 \end{cases}$

b) Cho hàm số $y = ax + b$. Tìm a và b biết rằng đồ thị của hàm số đã cho song song với đường thẳng $y = -2x + 3$ và đi qua điểm M(2; 5).

Bài 2. *(2đ)* Cho phương trình : $x^2 + 2(m + 1)x + m - 4 = 0$ (m là tham số)

a) Giải phương trình khi $m = -5$.

b) Chứng minh rằng phương trình luôn có hai nghiệm phân biệt với mọi m.

c) Tìm m sao cho phương trình đã cho có hai nghiệm x_1, x_2 thỏa mãn hệ thức $x_1^2 + x_2^2 + 3x_1x_2 = 0$.

Bài 3. *(2đ)* Một mảnh đất hình chữ nhật có chiều dài hơn chiều rộng 6m và bình phương độ dài đường chéo gấp 5 lần chu vi. Tính diện tích hình chữ nhật.

Bài 4. *(3đ)* Cho đường tròn tâm O, vẽ dây cung BC không đi qua tâm. Trên tia đối của tia BC lấy điểm M bất kì. Đường thẳng đi qua M cắt đường tròn (O) lần lượt tại hai điểm N và P (N nằm giữa M và P) sao cho O nằm bên trong góc PMC. Trên cung nhỏ NP lấy điểm A sao cho cung AN bằng cung AP. Hai dây cung AB, AC cắt NP lần lượt tại D và E.

a) Chứng minh tứ giác BDEC nội tiếp.

b) Chứng minh MB.MC = MN.MP.

c) Bán kính OA cắt NP tại K. Chứng minh $MK^2 > MB.MC$.

Bài 5. *(1đ)* Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $A = \dfrac{x^2 - 2x + 2011}{x^2}$ (với $x \neq 0$).

ĐỀ THI TUYỂN SINH VÀO LỚP 10 THPT TP. HỒ CHÍ MINH

Bài 1. *(2đ)* Giải các phương trình và hệ phương trình sau :

a) $3x^2 - 2x - 1 = 0$

b) $\begin{cases} 5x + 7y = 3 \\ 5x - 4y = -8 \end{cases}$

c) $x^4 + 5x^2 - 36 = 0$

d) $3x^2 - x\sqrt{3} + \sqrt{3} - 3 = 0$.

Bài 2. *(1,5đ)*

a) Vẽ đồ thị của hàm số (P) : $y = -x^2$ và đường thẳng (D) : $y = -2x - 3$ trên cùng một hệ trục tọa độ.

b) Tìm tọa độ các giao điểm của (P) và (D) ở câu trên bằng phép tính.

Bài 3. *(1,5đ)* Thu gọn các biểu thức sau :

a) $A = \sqrt{\dfrac{3\sqrt{3} - 4}{2\sqrt{3} + 1}} - \sqrt{\dfrac{\sqrt{3} + 4}{5 - 2\sqrt{3}}}$

b) $B = \dfrac{x\sqrt{x} - 2x + 28}{x - 3\sqrt{x} - 4} - \dfrac{\sqrt{x} - 4}{\sqrt{x} + 1} + \dfrac{\sqrt{x} + 8}{4 - \sqrt{x}}$ $(x \geq 0, x \neq 16)$.

Bài 4. *(1,5đ)* Cho phương trình : $x^2 - 2mx - 4m - 5 = 0$ (x là ẩn số).

a) Chứng minh rằng phương trình luôn luôn có nghiệm với mọi m.

b) Gọi x_1, x_2 là các nghiệm của phương trình.

Tìm m để biểu thức $A = x_1^2 + x_2^2 - x_1x_2$ đạt giá trị nhỏ nhất.

Bài 5. *(3,5đ)* Cho đường tròn (O) có tâm O, đường kính BC. Lấy một điểm A trên đường tròn (O) sao cho AB > AC. Từ A vẽ AH vuông góc với BC (H thuộc BC). Từ H vẽ HE vuông góc với AB và HF vuông góc với AC (E thuộc AB, F thuộc AC).

a) Chứng minh rằng AEHF là hình chữ nhật và OA vuông góc với EF.

b) Đường thẳng EF cắt đường tròn (O) tại P và Q (E nằm giữa P và F).

c) Gọi D là giao điểm của PQ và BC; K là giao điểm của AD và đường tròn (O) (K khác A). Chứng minh rằng AEFK là một tứ giác nội tiếp.

d) Gọi I là giao điểm của KF và BC. Chứng minh $IH^2 = IC.ID$.

B. LỜI GIẢI

ĐỀ THI TUYỂN SINH VÀO LỚP 10 THPT TP. HÀ NỘI

Bài 1.

1. Với $x \ge 0$; $x \ne 25$, ta có :

$$A = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-5} - \frac{10\sqrt{x}}{x-25} - \frac{5}{\sqrt{x}+5} = \frac{\sqrt{x}(\sqrt{x}+5) - 10\sqrt{x} - 5(\sqrt{x}-5)}{(\sqrt{x}+5)(\sqrt{x}-5)}$$

$$= \frac{x+5\sqrt{x}-10\sqrt{x}-5\sqrt{x}+25}{(\sqrt{x}+5)(\sqrt{x}-5)} = \frac{x-10\sqrt{x}+25}{(\sqrt{x}-5)(\sqrt{x}+5)} = \frac{(\sqrt{x}-5)^2}{(\sqrt{x}-5)(\sqrt{x}+5)}$$

$$= \frac{\sqrt{x}-5}{\sqrt{x}+5}.$$

2. Với x = 9, ta có : $\sqrt{x} = 3 \Rightarrow A = \dfrac{3-5}{3+5} = -\dfrac{1}{4}$.

3. Điều kiện $x \ge 0$; $x \ne 25$, ta có :

$$A < \frac{1}{3} \Leftrightarrow \frac{\sqrt{x}-5}{\sqrt{x}+5} < \frac{1}{3} \Leftrightarrow \frac{3\sqrt{x}-15-\sqrt{x}-5}{3(\sqrt{x}+5)} < 0$$

$$\Leftrightarrow 2\sqrt{x} - 20 < 0 \text{ (vì } 3(\sqrt{x}+5) > 0\text{)}$$

$$\Leftrightarrow 2\sqrt{x} < 20 \Leftrightarrow \sqrt{x} < 10 \Leftrightarrow x < 100$$

Kết hợp với điều kiện $x \ge 0$; $x \ne 25$, ta có :

$$0 \le x < 100 \text{ và } x \ne 25 \text{ thì } A < \frac{1}{3}.$$

Bài 2. Gọi x (ngày) là thời gian để đội xe chở hết số hàng theo dự định (x > 1).

Khi đó một ngày đội xe phải chở $\dfrac{140}{x}$ (tấn).

Vì chở thêm được 10 tấn nên số hàng đã chở được 140 + 10 = 150 (tấn)

Thời gian thực tế sớm hơn 1 ngày so với dự định nên ta có x – 1 (ngày) và mỗi ngày đội xe chở được $\dfrac{150}{x-1}$.

Theo đề ra, ta có phương trình :

$$\frac{150}{x-1} - \frac{140}{x} = 5 \Leftrightarrow \begin{cases} 150x - 140(x-1) = 5x(x-1) \\ x > 1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 150x - 140x + 140 = 5x^2 - 5x \\ x > 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 5x^2 - 15x - 140 = 0 \\ x > 1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 7 \text{ (nhận)} \\ x = -4 \text{ (loại)} \end{array}\right.$$

Vậy thời gian đội xe chở hết số hàng theo kế hoạch là 7 ngày.

* *Cách khác* : Ta có thể đặt ẩn x là số tấn hàng mỗi ngày đội xe phải chở theo kế hoạch và đưa đến phương trình : $\dfrac{150}{x+5} = \dfrac{140}{x} - 1$.

Bài 3.

1. Khi m = 1, ta có (d) : y = 2x + 8

Tọa độ giao điểm của (d) và (P) là nghiệm của hệ phương trình :

$$\begin{cases} y = x^2 \\ y = 2x + 8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 = 2x + 8 \\ y = x^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 2x - 8 = 0 \\ y = x^2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} x = -2 \\ x = 4 \end{array}\right. \\ y = x^2 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x = -2 \\ y = 4 \end{cases} \\ \begin{cases} x = 4 \\ y = 16 \end{cases} \end{array}\right.$$

Vậy tọa độ giao điểm của (d) và (P) là (–2; 4) và (4; 16).

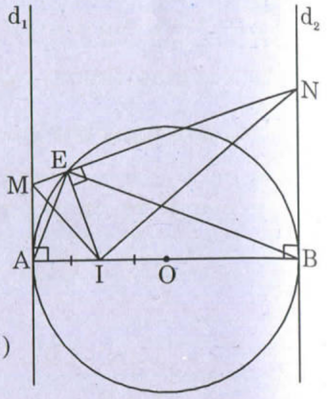
2. Xét phương trình hoành độ giao điểm của (P) và (d) :

$$x^2 = 2x - m^2 + 9 \Leftrightarrow x^2 - 2x + m^2 - 9 = 0 \qquad (*)$$

Đường thẳng (d) cắt parabol (P) tại hai điểm nằm về hai phía của trục tung ⇔ phương trình (*) có 2 nghiệm trái dấu ⇔ $P = \frac{c}{a} < 0 \Leftrightarrow m^2 - 9 < 0$

$\Leftrightarrow m^2 < 9 \Leftrightarrow \sqrt{m^2} < \sqrt{9} \Leftrightarrow |m| < 3 \Leftrightarrow -3 < m < 3$.

Bài 4.



1. Ta có $\widehat{MAI} = 90^\circ$ (tính chất tiếp tuyến)

   d ⊥ IE (gt) hay $\widehat{MEI} = 90^\circ$

   Do đó tứ giác AMEI nội tiếp (tổng hai góc đối bằng 180°).

2. Chứng minh tương tự câu 1 ta có tứ giác BNEI nội tiếp ($\widehat{NBI} = \widehat{NEI} = 90^\circ$)

   $\Rightarrow \widehat{ENI} = \widehat{EBI}$ (góc nội tiếp cùng chắn cung EI)

   Lại có tứ giác AMEI nội tiếp (cmt) ta có :

   $\widehat{EMI} = \widehat{EAI}$ mà $\widehat{EAI} + \widehat{EBI} = 90^\circ$ (vì $\widehat{AIB} = 90^\circ$)

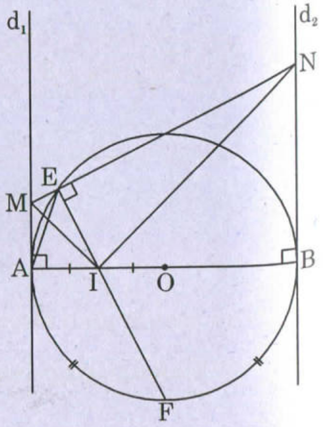
   $\Rightarrow \widehat{EMI} + \widehat{ENI} = 90^\circ \Rightarrow \widehat{MIN} = 90^\circ$.

3. Xét hai tam giác vuông MAI và NBI có $\widehat{AIM} = \widehat{BNI}$ (cùng phụ với $\widehat{NIB}$)

   $\Rightarrow \Delta MAI \backsim \Delta IBN$ (g.g) $\Rightarrow \frac{AM}{BI} = \frac{AI}{BN} \Rightarrow AM.BN = AI.BI$.

4. F là điểm chính giữa cung AB (không chứa E) khi E, I, F thẳng hàng.

   Ta có tứ giác AMEF vẫn nội tiếp $\Rightarrow \widehat{AMI} = \widehat{AEI} = 45^\circ$ nên ΔMAI vuông cân tại A $\Rightarrow AM = AI = \frac{R}{2}$.



   Xét tam giác vuông cân MAI, theo định lí Pi-ta-go ta có :

   $$MI^2 = AM^2 + AI^2 = \left(\frac{R}{2}\right)^2 + \left(\frac{R}{2}\right)^2 = \frac{R^2}{2}$$

   $$\Rightarrow MI = \frac{R\sqrt{2}}{2}$$

   Tương tự với tam giác vuông cân NBI ta có :

$$BN = BI = \frac{3R}{2} \quad \Rightarrow NI = \frac{3R\sqrt{2}}{2}$$

Vậy $S_{MIN} = \frac{1}{2}MI.NI = \frac{1}{2}.\frac{R\sqrt{2}}{2}.\frac{3R\sqrt{2}}{2} = \frac{3R^2}{4}$ (đvdt).

Bài 5. Ta có : $M = 4x^2 - 4x + 1 + x + \frac{1}{4x} + 2010 = (2x-1)^2 + \left(x + \frac{1}{4x}\right) + 2010$

Vì x > 0 nên theo bất đẳng thức Cô-si, ta có : $x + \frac{1}{4x} \geq 2\sqrt{x.\frac{1}{4x}} = 2.\frac{1}{2} = 1$

Lại có $(2x-1)^2 \geq 0$

Vậy $M \geq 0 + 1 + 2010 = 2011$

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow \begin{cases} 2x - 1 = 0 \\ x = \frac{1}{4x} \end{cases} \Leftrightarrow x = \frac{1}{2}$ (thỏa mãn điều kiện x > 0)

Vậy minM = 2011, đạt được khi $x = \frac{1}{2}$.

ĐỀ THI TUYỂN SINH VÀO LỚP 10 THPT TP. ĐÀ NẴNG

Bài 1.

a) Giải phương trình : $(2x+1)(3-x) + 4 = 0 \Leftrightarrow 6x - 2x^2 + 3 - x + 4 = 0$

$$\Leftrightarrow 2x^2 - 5x - 7 = 0$$

Ta có a – b + c = 2 – (–5) – 7 = 0 nên phương trình có hai nghiệm :

$$x_1 = -1 \text{ và } x_2 = \frac{7}{2}.$$

b) Ta có : $\begin{cases} 3x - |y| = 1 \\ 5x + 3y = 11 \end{cases}$

* *Trường hợp 1.* Nếu y ≥ 0, ta có hệ :

$$\begin{cases} 3x - y = 1 \\ 5x + 3y = 11 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 9x - 3y = 3 \\ 5x + 3y = 11 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 14x = 14 \\ 3x - y = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 2 \end{cases}$$

* *Trường hợp 2.* Nếu y < 0, ta có hệ :

$$\begin{cases} 3x + y = 1 \\ 5x + 3y = 11 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 9x + 3y = 3 \\ 5x + 3y = 11 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4x = -8 \\ 3x + y = 1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = -2 \\ y = 7 \text{ (loại vì } y < 0) \end{cases}$$

Vậy hệ có nghiệm : (x; y) = (1; 2).

Bài 2. Ta có : $Q = \left[\dfrac{\sqrt{3}(\sqrt{2}-1)}{\sqrt{2}-1} + \dfrac{\sqrt{5}(\sqrt{5}-1)}{\sqrt{5}-1}\right] : \dfrac{2}{\sqrt{5}-\sqrt{3}} = (\sqrt{3}+\sqrt{5}).\dfrac{\sqrt{5}-\sqrt{3}}{2}$

$$= \frac{(\sqrt{5})^2 - (\sqrt{3})^2}{2} = \frac{5-3}{2} = 1.$$

Bài 3.

a) Khi m = 0, ta có phương trình :

$$x^2 - 2x = 0 \Leftrightarrow x(x-2) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x - 2 = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = 2 \end{array}\right.$$

b) Phương trình đã cho có nghiệm $\Leftrightarrow \Delta' \geq 0 \Leftrightarrow 1 - (-2m^2) \geq 0$

$\Leftrightarrow 1 + 2m^2 \geq 0$, luôn đúng $\forall m$

Theo hệ thức Vi-ét, ta có : $x_1 + x_2 = 2 \Leftrightarrow x_1 = 2 - x_2$; $x_1x_2 = -2m^2$

Khi đó $x_1^2 = 4x_2^2 \Leftrightarrow (2 - x_2)^2 = 4x_2^2 \Leftrightarrow (2 - x_2)^2 - (2x_2)^2 = 0$

$$\Leftrightarrow (2 - x_2 - 2x_2)(2 - x_2 + 2x_2) = 0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2 - 3x_2 = 0 \\ 2 + x_2 = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x_2 = \dfrac{2}{3} \\ x_2 = -2 \end{array}\right.$$

- Nếu $x_2 = \dfrac{2}{3} \Rightarrow x_1 = \dfrac{4}{3}$

  Khi đó $x_1x_2 = -2m^2 \Leftrightarrow \dfrac{2}{3}.\dfrac{4}{3} = -2m^2 \Leftrightarrow m^2 = -\dfrac{4}{9}$ (vô nghiệm).

- Nếu $x_2 = -2 \Rightarrow x_1 = 4$

  Khi đó $x_1x_2 = -2m^2 \Leftrightarrow -8 = -2m^2 \Leftrightarrow m^2 = 4 \Leftrightarrow m = \pm 2$.

Bài 4. Gọi x, y là độ dài hai cạnh của hình chữ nhật (x, y tính bằng cm, x > 0, y > 0).

Chu vi hình chữ nhật là : $2(x + y) = 28 \Rightarrow x + y = 14$ (x < 14; y < 14)

Vì độ dài đường chéo của hình chữ nhật bằng 10 (cm), theo định lí Pi-ta-go, ta có : $x^2 + y^2 = 10^2 \Leftrightarrow x^2 + y^2 = 100$.

Ta có hệ phương trình :

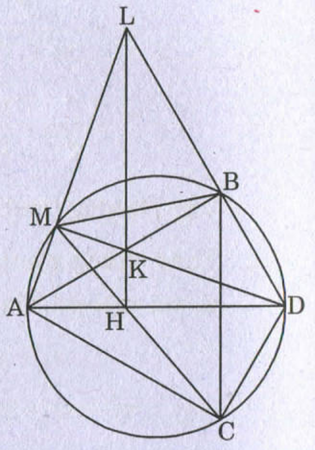
$$\begin{cases} x + y = 14 \\ x^2 + y^2 = 100 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 14 - x \\ x^2 + (14 - x)^2 = 100 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 14 - x \\ 2x^2 - 28x + 196 = 100 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y = 14 - x \\ 2x^2 - 14x + 48 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 14 - x \\ \left[\begin{array}{l} x = 8 \\ x = 6 \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x = 8 \\ y = 6 \end{cases} \\ \begin{cases} x = 6 \\ y = 8 \end{cases} \end{array}\right.$$

Vậy độ dài hai cạnh hình chữ nhật là 6 (cm) và 8 (cm).

Bài 5.

a) Ta có $\overset{\frown}{DB} = \overset{\frown}{DC} = 60^\circ$ nên $\widehat{BMD} = \widehat{CMD}$ hay MD là đường phân giác của $\widehat{BMC}$.



b) Dễ thấy AD là phân giác của ΔABC đều nên AD đồng thời là đường cao hay AD ⊥ BC.

Tứ giác ABDC có hai đường chéo AD và BC vuông góc nên :

$$S_{ABDC} = \frac{1}{2}AD.BC = \frac{1}{2}.2R.R\sqrt{3} = R^2\sqrt{3}.$$

c) Ta có $\widehat{BAD} = \widehat{CMD}$ (chắn hai cung bằng nhau $\overset{\frown}{DB} = \overset{\frown}{DC}$)

hay $\widehat{KAH} = \widehat{HMK}$ ⇒ Tứ giác AMKH nội tiếp

$\Rightarrow \widehat{AHK} = \widehat{AMK} = 90^\circ$ hay KH ⊥ AD.

Mặt khác ta có $\widehat{AMD} = \widehat{ABD} = 90^\circ$ (AD là đường kính) hay DM ⊥ AM và AB ⊥ DB.

Mà AB cắt MD tại K nên K là trực tâm ΔALD (L là giao điểm của AM và DB), lại có KH ⊥ AD (cmt) nên KH là đường cao thứ ba của ΔALD.

Do đó AM, BD và HK đồng quy.

ĐỀ THI TUYỂN SINH VÀO LỚP 10 THPT TỈNH BÌNH ĐỊNH

Bài 1.

a) Ta có : $\begin{cases} 3x - y = 7 \\ 2x + y = 8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x - y = 7 \\ 5x = 15 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 \\ y = 2 \end{cases}$

b) Đồ thị của hàm số y = ax + b song song với đường thẳng y = –2x + 3

$\Leftrightarrow \begin{cases} a = -2 \\ b \neq 3 \end{cases}$

Khi đó, ta có $y = -2x + b$

Mặt khác, đồ thị của hàm số qua điểm $M(2; 5)$ nên:

$$5 = (-2).2 + b \Rightarrow b = 9 \neq 3$$

Vậy $a = -2$, $b = 9$.

Bài 2.

a) Khi $m = -5$, ta có phương trình : $x^2 - 8x - 9 = 0$

Vì $a = 1$, $b = -8$, $c = -9 \Rightarrow a - b + c = 0$, phương trình có hai nghiệm $x_1 = -1$, $x_2 = -\dfrac{c}{a} = 9$.

b) Ta có $\Delta' = (m + 1)^2 - (m - 4) = m^2 + 2m + 1 - m + 4 = m^2 + m + 5$

$$= \left(m + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{19}{4} > 0,\ \forall m$$

Vậy phương trình đã cho luôn luôn có hai nghiệm phân biệt với mọi m.

c) Theo chứng minh trên, phương trình luôn có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 với mọi m. Theo hệ thức Vi-ét, ta có :

$$x_1 + x_2 = -2(m + 1);\ \ x_1x_2 = m - 4$$

Vậy : $x_1^2 + x_2^2 + 3x_1x_2 = 0 \Leftrightarrow (x_1 + x_2)^2 + x_1x_2 = 0$

$$\Leftrightarrow 4(m + 1)^2 + (m - 4) = 0 \Leftrightarrow 4m^2 + 9m = 0 \Leftrightarrow m(4m + 9) = 0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m = 0 \\ 4m + 9 = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m = 0 \\ m = -\dfrac{9}{4}. \end{array}\right.$$

Bài 3. Gọi x (m) là độ dài chiều rộng của mảnh đất, $x > 0$.

Khi đó, chiều dài của mảnh đất là $x + 6$ (m), nên chu vi của nó sẽ là $2(x + x + 6) = 4x + 12$.

Theo định lí Pi-ta-go, ta có : $x^2 + (x + 6)^2 = 2x^2 + 12x + 36$ là bình phương độ dài của đường chéo hình chữ nhật.

Theo bài ra, ta có phương trình :

$$2x^2 + 12x + 36 = 5(4x + 12) \Leftrightarrow 2x^2 - 8x - 24 = 0$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 4x - 12 = 0$$

Ta có $a = 1$, $b = -4 \Rightarrow b' = -2$, $c = -12$; $\Delta' = (-2)^2 - 1.(-12) = 16$

$\Rightarrow \sqrt{\Delta'} = 4$

Phương trình có hai nghiệm phân biệt : $x_1 = 2 + 4 = 6$, $x_2 = 2 - 4 = -2$

Vì $x > 0$ nên ta chọn $x = 6$.

Vậy diện tích của mảnh đất hình chữ nhật là : $6.(6 + 6) = 72$ (m^2).

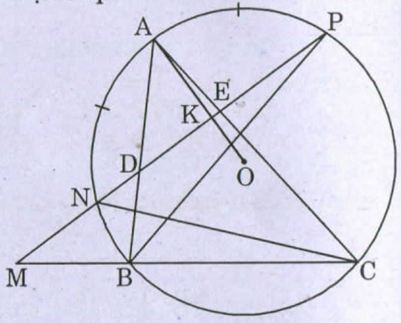
Bài 4.

a) Ta có $sđ\widehat{ACB} = \dfrac{1}{2}(sđ\overset{\frown}{AN} + sđ\overset{\frown}{NB})$ (góc nội tiếp chắn cung AB)

$sđ\widehat{BDN} = \dfrac{1}{2}(sđ\overset{\frown}{AP} + sđ\overset{\frown}{NB})$ (góc có đỉnh ở bên trong đường tròn)

Mà $\overset{\frown}{AN} = \overset{\frown}{AP}$ (gt) $\Rightarrow \widehat{ACB} = \widehat{BDN}$ mà $\widehat{BDN} + \widehat{BDE} = 180^\circ$

$\Rightarrow \widehat{BDE} + \widehat{BCA} = 180^\circ \Rightarrow$ Tứ giác BDEC nội tiếp.



b) Xét ΔMBP và ΔMNC có :

$\widehat{CMP}$ chung

$\widehat{MPB} = \widehat{MCN}$ (góc nội tiếp cùng chắn cung NB)

$\Rightarrow \Delta MBP \backsim \Delta MNC$ (g.g)

$\Rightarrow \dfrac{MB}{MN} = \dfrac{MP}{MC} \Rightarrow MB.MC = MN.MP.$

c) Ta có $\overset{\frown}{AN} = \overset{\frown}{AP}$ (gt) $\Rightarrow AN = AP$ lại có $ON = OP$ (= R) nên OA là đường trung trực của đoạn NP hay $OA \perp NP$ và K là trung điểm của NP hay $NP = 2NK$.

Lại có $MB.MC = MN.MP$ (cm câu b)

$\Rightarrow MB.MC = MN(MN + NP) = MN(MN + 2NK) = MN^2 + 2MN.NK$ (1)

Lại có $MK^2 = (MN + NK)^2$

$= MN^2 + 2MN.NK + NK^2 > MN^2 + 2MN.NK$ (2)

Từ (1) và (2) $\Rightarrow MK^2 > MB.MC$.

Bài 5. Giả sử giá trị nhỏ nhất của A bằng m, đạt được tại x_0 ($x_0 \neq 0$). Ta có :

$$m = \frac{x_0^2 - 2x_0 + 2011}{x_0^2} \Leftrightarrow mx_0^2 = x_0^2 - 2x_0 + 2011$$

$$\Leftrightarrow (m-1)x_0^2 + 2x_0 - 2011 = 0 \qquad (*)$$

- Nếu $m - 1 = 0 \Leftrightarrow m = 1$. Khi đó $x_0 = \dfrac{2011}{2}$
- Nếu $m - 1 \neq 0$. Phương trình (*) (với ẩn số x_0) có nghiệm $\Leftrightarrow \Delta' \geq 0$

$$\Leftrightarrow 1 + 2011(m-1) \geq 0 \Leftrightarrow 2011m - 2010 \geq 0 \Leftrightarrow m \geq \frac{2010}{2011} \left(\frac{2010}{2011} < 1\right)$$

Vậy giá trị nhỏ nhất của A bằng $\dfrac{2010}{2011}$, đạt được khi x = 2010 (là nghiệm kép của phương trình (*), với $m \leq \dfrac{2010}{2011}$).

ĐỀ THI TUYỂN SINH VÀO LỚP 10 THPT TP. HỒ CHÍ MINH

Bài 1.

a) $3x^2 - 2x - 1 = 0$

Ta có $a = 3, b = -2, c = -1 \Rightarrow a + b + c = 3 - 2 - 1 = 0$ nên phương trình có hai nghiệm $x_1 = 1$, $x_2 = \dfrac{c}{a} = -\dfrac{1}{3}$.

b) Ta có $\begin{cases} 5x + 7y = 3 \\ 5x - 4y = -8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 11y = 11 \\ 5x - 4y = -8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 1 \\ x = -\dfrac{4}{5} \end{cases}$

Hệ có nghiệm $(x; y) = \left(-\dfrac{4}{5}; 1\right)$.

c) Đặt $t = x^2$, $t \geq 0$, ta có phương trình : $t^2 + 5t - 36 = 0$

$$\Delta = 5^2 - 4.1.(-36) = 25 + 144 = 169 \Rightarrow \sqrt{\Delta} = 13$$

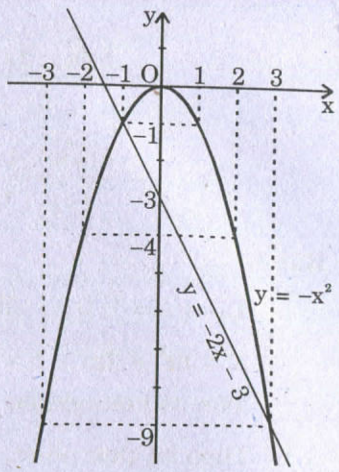
Phương trình có nghiệm $t_1 = \dfrac{-5-13}{2} = -9$ (loại), $t_2 = \dfrac{-5+13}{2} = 4$ (nhận)

Vậy $x^2 = 4 \Leftrightarrow x = \pm 2$.

d) Ta có $a = 3, b = -\sqrt{3}, c = \sqrt{3} - 3 \Rightarrow a + b + c = 3 - \sqrt{3} + \sqrt{3} - 3 = 0$ nên phương trình đã cho có nghiệm $x_1 = 1$ và $x_2 = \dfrac{c}{a} = \dfrac{\sqrt{3}-3}{3}$.

Bài 2.

a) Vẽ đồ thị của (P) và (D) trên cùng một hệ trục tọa độ :



- Bảng giá trị :

x	−2	−1	0	1	2
$y = -x^2$	−4	−1	0	−1	−4

Đồ thị (P) là parabol.

- Bảng giá trị :

x	0	1
$y = -2x - 3$	−3	−5

Đường thẳng (D) qua hai điểm A(0; −3) và B(1; −5).

b) Tọa độ giao điểm của (P) và (D) thỏa mãn hệ phương trình :

$$\begin{cases} y = -x^2 \\ y = -2x - 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -x^2 = -2x - 3 \\ y = -2x - 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 2x - 3 = 0 & (1) \\ y = -2x - 3 & (2) \end{cases}$$

Giải phương trình (1) : Ta có $a = 1, b = -2, c = -3 \Rightarrow a - b + c = 0$ nên (1) có hai nghiệm $x_1 = -1$ và $x_2 = -\dfrac{c}{a} = 3$.

Thế x_1, x_2 vào (2), ta được : $x_1 = -1 \Rightarrow y_1 = -1$, $x_2 = 3 \Rightarrow y_2 = -9$.

Vậy tọa độ giao điểm của (P) và (D) là (−1; −1) và (3; −9).

Bài 3.

a) Ta có $A = \sqrt{\dfrac{(3\sqrt{3}-4)(2\sqrt{3}-1)}{11}} - \sqrt{\dfrac{(\sqrt{3}+4)(5+2\sqrt{3})}{13}}$

$$= \sqrt{\frac{22 - 11\sqrt{3}}{11}} - \sqrt{\frac{26 + 13\sqrt{3}}{13}} = \sqrt{2-\sqrt{3}} - \sqrt{2+\sqrt{3}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\sqrt{4 - 2\sqrt{3}} - \sqrt{4 + 2\sqrt{3}}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\sqrt{(\sqrt{3}-1)^2} - \sqrt{(\sqrt{3}+1)^2}\right)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\left|\sqrt{3} - 1\right| - \left|\sqrt{3} + 1\right|\right) = \frac{1}{\sqrt{2}}(\sqrt{3} - 1 - \sqrt{3} - 1) = -\sqrt{2}.$$

b) Ta có $B = \dfrac{x\sqrt{x} - 2x + 28}{(\sqrt{x}+1)(\sqrt{x}-4)} - \dfrac{\sqrt{x}-4}{\sqrt{x}+1} - \dfrac{\sqrt{x}+8}{\sqrt{x}-4}$

$$= \frac{x\sqrt{x} - 2x + 28 - (\sqrt{x} - 4)^2 - (\sqrt{x} + 8)(\sqrt{x} + 1)}{(\sqrt{x} + 1)(\sqrt{x} - 4)}$$

$$= \frac{x\sqrt{x} - 2x + 28 - x + 8\sqrt{x} - 16 - x - 9\sqrt{x} - 8}{(\sqrt{x} + 1)(\sqrt{x} - 4)} = \frac{x\sqrt{x} - 4x - \sqrt{x} + 4}{(\sqrt{x} + 1)(\sqrt{x} - 4)}$$

$$= \frac{x(\sqrt{x} - 4) - (\sqrt{x} - 4)}{(\sqrt{x} + 1)(\sqrt{x} - 4)} = \frac{(\sqrt{x} - 4)(x - 1)}{(\sqrt{x} + 1)(\sqrt{x} - 4)} = \sqrt{x} - 1.$$

Bài 4.

a) Ta có $a = 1$, $b = -2m$, $c = -4m - 5$

$\Delta' = m^2 + 4m + 5 = (m + 2)^2 + 1 > 0$, $\forall m$ nên phương trình đã cho luôn luôn có hai nghiệm phân biệt với mọi m.

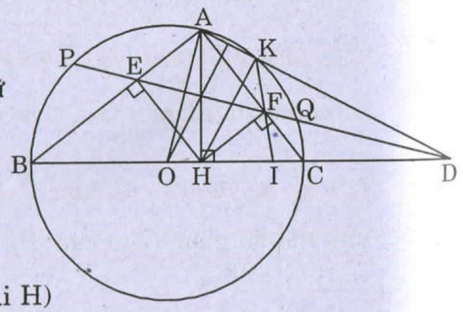
b) Theo hệ thức Vi-ét, ta có : $x_1 + x_2 = 2m$, $x_1x_2 = -4m - 5$

$\Rightarrow A = (x_1 + x_2)^2 - 3x_1x_2 = 4m^2 + 3(4m + 5) = (2m + 3)^2 + 6 \geq 6$, $\forall m$

Vậy giá trị nhỏ nhất của A bằng 6.

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow 2m + 3 = 0 \Leftrightarrow m = -\frac{3}{2}$.

Bài 5.



a) Dễ thấy tứ giác AEHF là hình chữ nhật (có ba góc vuông).

Ta có AEHF là hình chữ nhật (cmt)

$\Rightarrow \widehat{FAH} = \widehat{AFE}$

Mà $\widehat{FAH} + \widehat{C} = 90^\circ$ (ΔAHC vuông tại H)

Mà $\widehat{C} = \widehat{OAC}$ (ΔOAC cân tại O)

$\Rightarrow \widehat{AFE} + \widehat{OAC} = 90^\circ \Rightarrow OA \perp EF$.

* *Cách khác* : Kẻ tiếp tuyến Ax, ta có $Ax \perp OA$ (1)

Lại có $\widehat{AEF} = \widehat{AHF}$ (vì AEHF là hình chữ nhật), $\widehat{AHF} = \widehat{C}$ (cùng phụ với $\widehat{HAC}$)

$\Rightarrow \widehat{AEF} = \widehat{C}$ mà $\widehat{C} = \widehat{BAx}$ (góc nội tiếp và góc giữa tiếp tuyến một dây cùng chắn cung AB) $\Rightarrow \widehat{AEF} = \widehat{BAx}$

Do đó Ax // EF (cặp góc so le trong bằng nhau) (2)

Từ (1) và (2) $\Rightarrow OA \perp EF$.

b) Ta có $OA \perp EF$ (cmt) $\Rightarrow \overset{\frown}{AP} = \overset{\frown}{AQ} \Rightarrow \widehat{APQ} = \widehat{ABP}$

Xét ΔAPE và ΔABP có $\widehat{PAB}$ chung và $\widehat{APQ} = \widehat{ABP}$ (cmt)

Do đó $\Delta APE \backsim \Delta ABP$ (g.g) $\Rightarrow \frac{AP}{AB} = \frac{AE}{AP} \Rightarrow AP^2 = AE.AB$

Lại có ΔAHB vuông có đường cao EH nên $AH^2 = AE.AB$ (hệ thức lượng trong tam giác vuông) $\Rightarrow AP^2 = AH^2 \Rightarrow AP = AH$ hay ΔAPH cân tại A.

c) Ta có $\widehat{AEF} = \widehat{ACB}$ (cmt) $\Rightarrow$ Tứ giác BEFC nội tiếp $\Rightarrow \widehat{B} = \widehat{CFD}$

Xét ΔDFC và ΔDBE có $\widehat{BDE}$ chung và $\widehat{B} = \widehat{CFD}$ (cmt)

$\Rightarrow \Delta DFC \backsim \Delta DBE$ (g.g) $\Rightarrow \frac{DE}{DC} = \frac{DB}{DF} \Rightarrow DE.DF = DB.DC$

Do bốn điểm A, K, C, B thuộc đường tròn (O), chứng minh tương tự ta có $DB.DC = DK.DA \Rightarrow DE.DF = DK.DA$ (3)

Xét ΔDKF và ΔDEA có $\widehat{ADE}$ chung và (3) $\Rightarrow \Delta DKF \backsim \Delta DEA$ (c.g.c)

$\Rightarrow \widehat{DKF} = \widehat{DEA} \Rightarrow$ Tứ giác AEFK nội tiếp.

d) Ta có tứ giác AEFK nội tiếp (cmt) và tứ giác AEHF là hình chữ nhật (cmt) nên năm điểm A, E, H, F, K cùng thuộc một đường tròn đường kính AH hay $HK \perp AK$.

Xét tam giác vuông AHD có đường cao HK, ta có : $AH^2 = AK.AD$ (hệ thức lượng).

Tương tự với ΔAHC có đường cao HF, ta có : $AH^2 = AF.AC$

$\Rightarrow AK.AD = AF.AC$

Do đó $\Delta AFK \backsim \Delta ADC$ (c.g.c) $\Rightarrow \widehat{AFK} = \widehat{ADC}$

$\Rightarrow$ Tứ giác KFCD nội tiếp.

Xét ΔICF và ΔIKD có $\widehat{DIK}$ chung và $\widehat{ICF} = \widehat{IKD}$ (do tứ giác KFCD nội tiếp) $\Rightarrow \Delta ICF \backsim \Delta IKD$ (g.g) $\Rightarrow \frac{IC}{IK} = \frac{IF}{ID} \Rightarrow IC.ID = IF.IK$

Lại có $\Delta IHF \backsim \Delta IKH$ (g.g) $\Rightarrow IH^2 = IF.IK \Rightarrow IH^2 = IC.ID$.

ĐỀ THI TUYỂN SINH VÀO LỚP 10 THPT CHUYÊN TP. HỒ CHÍ MINH
NĂM HỌC 2010 – 2011

Bài 1. *(4đ)*

1. Giải hệ phương trình : $\begin{cases} \dfrac{1}{x+1} + y = 1 \\ \dfrac{2}{x+1} + 5y = 3 \end{cases}$

2. Giải phương trình : $(2x^2 - x)^2 + 2x^2 - x - 12 = 0$.

Bài 2. *(3đ)* Cho phương trình : $x^2 - 2(2m+1)x + 4m^2 + 4m - 3 = 0$ (x là ẩn số). Tìm m để phương trình có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 ($x_1 < x_2$) thỏa $|x_1| = 2|x_2|$.

Bài 3. *(2đ)* Thu gọn biểu thức : $A = \dfrac{\sqrt{7+\sqrt{5}} + \sqrt{7-\sqrt{5}}}{\sqrt{7+2\sqrt{11}}} - \sqrt{3-2\sqrt{2}}$.

Bài 4. *(4đ)* Cho tam giác ABC cân tại A nội tiếp đường tròn (O). Gọi P là điểm chính giữa của cung nhỏ AC. Hai đường thẳng AP và BC cắt nhau tại M. Chứng minh rằng :

a) $\widehat{ABP} = \widehat{AMB}$ b) MA.MP = BA.BM.

Bài 5. *(3đ)*

a) Cho phương trình : $2x^2 + mx + 2n + 8 = 0$ (x là ẩn số và m, n là các số nguyên). Giả sử phương trình có các nghiệm đều là số nguyên.
Chứng minh rằng : $m^2 + n^2$ là hợp số.

b) Cho hai số dương a, b thỏa : $a^{100} + b^{100} = a^{101} + b^{101} = a^{102} + b^{102}$.
Tính $P = a^{2010} + b^{2010}$.

Bài 6. *(2đ)* Cho tam giác OAB vuông cân tại O với OA = OB = 2a. Gọi (O) là đường tròn tâm O bán kính a. Tìm điểm M thuộc (O) sao cho MA + 2MB đạt giá trị nhỏ nhất.

Bài 7. *(2đ)* Cho a, b là các số dương thỏa $a^2 + 2b^2 \le 3c^2$. Chứng minh :

$$\frac{1}{a} + \frac{2}{b} \ge \frac{3}{c}.$$

BÀI GIẢI

Bài 1.

1. Đặt $u = \dfrac{1}{x+1}$. Ta có hệ :

$$\begin{cases} u + y = 1 \\ 2u + 5y = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2u + 2y = 2 \\ 2u + 5y = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3y = 1 \\ u + y = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = \dfrac{1}{3} \\ u = \dfrac{2}{3} \end{cases}$$

$\dfrac{1}{x+1} = \dfrac{2}{3} \Leftrightarrow \begin{cases} 2(x+1) = 3 \\ x + 1 \ne 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = \dfrac{1}{2}$. Hệ có nghiệm: $\left(\dfrac{1}{2}; \dfrac{1}{3}\right)$.

2. Đặt $t = 2x^2 - x$. Ta có phương trình : $t^2 + t - 12 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = 3 \\ t = -4 \end{array}\right.$

$$t = 3 \Leftrightarrow 2x^2 - x = 3 \Leftrightarrow 2x^2 - x - 3 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -1 \\ x = \dfrac{3}{2} \end{array}\right.$$

$t = -4 \Leftrightarrow 2x^2 - x = -4 \Leftrightarrow 2x^2 - x + 4 = 0$ (vô nghiệm)

Phương trình có nghiệm : $x_1 = -1$, $x_2 = \dfrac{3}{2}$.

Bài 2. Ta có : $a = 1$; $b = -2(2m+1) \Rightarrow b' = -(2m+1)$; $c = 4m^2 + 4m - 3$

$\Rightarrow \quad \Delta' = (2m+1)^2 - (4m^2 + 4m - 3) = 4 > 0, \forall m$

Phương trình luôn có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2.

Đặt $x_1 = 2m - 1$; $x_2 = 2m + 3$, ta có : $x_1 < x_2$ (hiển nhiên)

Ta co : $|x_1| = 2|x_2| \Leftrightarrow |2m - 1| = 2|2m + 3|$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2m - 1 = 2(2m+3) \\ 2m - 1 = -2(2m+3) \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m = -\dfrac{7}{2} \\ m = -\dfrac{5}{6} \end{array}\right..$$

Bài 3. Xét $B = \dfrac{\sqrt{7+\sqrt{5}} + \sqrt{7-\sqrt{5}}}{\sqrt{7+2\sqrt{11}}}$, nhận thấy B > 0, nên

$$B^2 = \frac{14 + 2\sqrt{44}}{7 + 2\sqrt{11}} = 2 \qquad \Rightarrow B = \sqrt{2}$$

Vậy $A = \sqrt{2} - (\sqrt{2} - 1) = 1$.

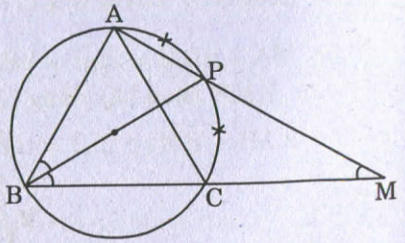
Bài 4.

a) Ta có : $\widehat{ABP} = \dfrac{1}{2}\text{sđ}\overset{\frown}{AP}$ (số đo của góc nội tiếp và cung bị chắn)

$\widehat{AMB} = \dfrac{1}{2}\text{sđ}(\overset{\frown}{AB} - \overset{\frown}{PC})$ (góc có đỉnh bên ngoài đường tròn)

$= \dfrac{1}{2}\text{sđ}(\overset{\frown}{AC} - \overset{\frown}{PC})$ (vì AB = AC (gt))

$= \dfrac{1}{2}\text{sđ}\overset{\frown}{AP}$



Do đó : $\widehat{ABP} = \widehat{AMB}$.

b) Ta có : $\widehat{ABP} = \widehat{AMB}$ (cmt)

mà $\widehat{ABP} = \widehat{CBP}$ (vì P là điểm chính giữa cung AC)

$\Rightarrow \quad \widehat{CBP} = \widehat{AMB}$ hay ΔBPM cân tại P $\Rightarrow$ PB = PM.

Mặt khác xét ΔMAB và ΔBAP có $\widehat{MAB}$ chung, $\widehat{ABP} = \widehat{AMB}$ (cmt).

Do đó ΔMAB ∽ ΔBAP (g.g) $\Rightarrow \frac{MA}{BA} = \frac{BM}{BP} \Rightarrow \frac{MA}{BA} = \frac{BM}{PM}$

$\Rightarrow MA.MP = BA.BM$ (vì PB = PM).

Bài 5.

a) Gọi x_1, x_2 là hai nghiệm nguyên của phương trình. Ta có :

$$x_1 + x_2 = -\frac{m}{2};\ x_1x_2 = n + 4 \text{ (hệ thức Vi-ét)}$$

$$\Rightarrow m = -2(x_1 + x_2); \quad n = x_1x_2 - 4$$

$$\Rightarrow m^2 + n^2 = 4(x_1^2 + x_2^2 + 2x_1x_2) + x_1^2x_2^2 - 8x_1x_2 + 16$$

$$= 4x_1^2 + 4x_2^2 + x_1^2x_2^2 + 16 = (x_1^2 + 4)(x_2^2 + 4)$$

Vì $x_1^2 + 4$ và $x_2^2 + 4$ đều nguyên, lớn hơn 1 nên $m^2 + n^2$ là hợp số.

b) Ta có : $\begin{cases} a^{100} + b^{100} = a^{101} + b^{101} \\ a^{101} + b^{101} = a^{102} + b^{102} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a^{100}(1-a) + b^{100}(1-b) = 0 \\ a^{101}(1-a) + b^{101}(1-b) = 0 \end{cases}$

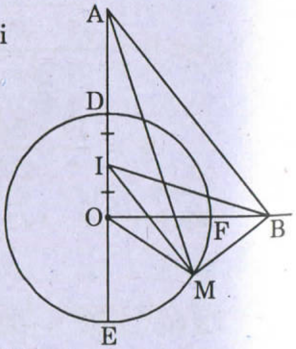
$$\Rightarrow a^{100}(1 - a) + b^{100}(1 - b) = a^{101}(1 - a) + b^{101}(1 - b)$$

$$\Rightarrow a^{100}(1 - a)^2 + b^{100}(1 - b)^2 = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a^{100}(1-a)^2 = 0 \\ b^{100}(1-b)^2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 1 - a = 0 \\ 1 - b = 0 \end{cases} \Rightarrow a = b = 1.$$

Vậy $a^{2010} + b^{2010} = 2$.

Bài 6. Gọi D, E theo thứ tự là giao điểm của tia AO với đường tròn (O; a) ta có D là trung điểm của OA. Gọi I là trung điểm của OD và F là giao điểm của OB với đường tròn (O).



- Nếu M trùng với D ta có : AM = AD, IM = ID. Vì AD = 2ID ⇒ AM = 2IM
- Nếu M trùng với E ta có : AM = AE, IM = IE. Vì AI = IE ⇒ AM = 2IM.
- Nếu M không trùng với D và E.

Xét ΔOMA và ΔOMI có $\widehat{AOM}$ chung và $\frac{IO}{OM} = \frac{OM}{OA} = \frac{1}{2}$

$\Rightarrow$ ΔOMA ∽ ΔOIM (c.g.c) $\Rightarrow \frac{MI}{MA} = \frac{1}{2} \Rightarrow MA = 2MI$

$\Rightarrow MA + 2BM = 2MI + 2BM = 2(MI + BM)$

Xét ΔIMB theo bất đẳng thức tam giác ta có : $MI + BM \geq IB$

$\Rightarrow 2(MI + BM) \geq 2IB = 2\sqrt{OB^2 + OI^2}$ (định lí Pytago)

$$= 2\sqrt{(2a)^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2} = 2\sqrt{\frac{17a^2}{4}} = a\sqrt{17}$$

Dấu "=" xảy ra ⇔ M trùng F.

Vậy AM + 2BM đạt giá trị nhỏ nhất bằng $a\sqrt{17}$ ⇔ M trùng F.

Bài 7. Ta chứng minh bổ đề sau. Với a, b, c không âm, ta có :

$$a + b + c \geq 3\sqrt[3]{abc} \text{ (bất đẳng thức Côsi cho ba số)}$$

Ta có : $\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$; $\frac{c+d}{2} \geq \sqrt{cd} \Rightarrow \frac{a+b+c+d}{2} \geq \sqrt{ab} + \sqrt{cd}$

Lại có : $\sqrt{ab} + \sqrt{cd} \geq 2\sqrt{\sqrt{ab}.\sqrt{cd}} \Leftrightarrow \frac{a+b+c+d}{4} \geq \sqrt{\sqrt{ab}.\sqrt{cd}}$

Từ kết quả trên, ta chứng minh :

$$\frac{a+b+c}{3} \geq \sqrt[3]{abc} \Leftrightarrow a + b + c + \sqrt[3]{abc} \geq 4\sqrt[3]{abc}. \text{ Thật vậy :}$$

Đặt $d = \sqrt[3]{abc}$, ta có :$a + b + c + \sqrt[3]{abc} \geq 4\sqrt{\sqrt{abc}\sqrt{\sqrt[3]{abc}}} = 4\sqrt[3]{abc}$ (đpcm)

Áp dụng bổ đề trên, ta có :

$$a + 2b = a + b + b \geq 3\sqrt[3]{ab^2}\ ;\ \frac{1}{a} + \frac{2}{b} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{b} \geq 3\sqrt[3]{\frac{1}{ab^2}}$$

Các vế đều dương, ta có : $(a + 2b)\left(\frac{1}{a} + \frac{2}{b}\right) \geq 9 \Rightarrow \frac{1}{a} + \frac{2}{b} \geq \frac{9}{a + 2b}$ (*)

Bạn có thể chứng minh trực tiếp bất đẳng thức (*) bằng cách biến đổi tương đương như sau :

(*) $\Leftrightarrow (a + 2b)(2a + b) \geq 9ab \Leftrightarrow 2a^2 - 4ab + 2b^2 \geq 0$

$\Leftrightarrow (a - b)^2 \geq 0$, luôn đúng

Ta lại có : $a + b + b \leq \sqrt{1^2 + 1^2 + 1^2}.\sqrt{a^2 + b^2 + b^2}$

(bất đẳng thức Bu-nhi-a-cốp-xki)

hay $a + 2b \leq \sqrt{3(a^2 + 2b^2)}$ (**)

(Bạn có thể chứng minh trực tiếp bất đẳng thức (**) bằng cách bình phương hai vế). Từ (*) và (**), ta có :

$$\frac{1}{a} + \frac{2}{b} \geq \frac{9}{a + 2b} \geq \frac{9}{\sqrt{3(a^2 + 2b^2)}} \geq \frac{3}{c} \quad (\text{vì } a^2 + 2b^2 \leq 3c^2).$$

Từ đó ta có đpcm.

Bất đẳng thức Bunhiacốpxki (Bunyakovsky) :

- $|ax + by| \leq \sqrt{a^2 + b^2}.\sqrt{x^2 + y^2}$; $\forall a, b, x, y \in \mathbb{R}$

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow \frac{a}{x} = \frac{b}{y}$

- $|ax + by + cz| \leq \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}.\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$; $\forall a, b, c, x, y, z \in \mathbb{R}$

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow \frac{a}{x} = \frac{b}{y} = \frac{c}{z}$.

(Chứng minh các bất đẳng thức này, bạn hãy bình phương hai vế và biến đổi thành một tổng bình phương).

CÁC ĐỀ THI TUYỂN SINH VÀO LỚP 10 THPT NĂM HỌC 2012 - 2013

ĐỀ THI TUYỂN SINH VÀO LỚP 10 CHUYÊN LAM SƠN, THANH HÓA

Câu 1. *(2,0 điểm)*

Cho biểu thức : $P = \left(\dfrac{\sqrt{a}+1}{\sqrt{a}-1} - \dfrac{\sqrt{a}-1}{\sqrt{a}+1} + 4\sqrt{a}\right)\dfrac{1}{2a\sqrt{a}}$, (với $a > 0$, $a \neq 1$)

1. Chứng minh rằng : $P = \dfrac{2}{a-1}$.
2. Tìm giá trị của a để P = a.

Câu 2. *(2,0 điểm)*

Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho parabol (P) : $y = x^2$ và đường thẳng (d) : $y = 2x + 3$.

1. Chứng minh rằng (d) và (P) có hai điểm chung phân biệt.
2. Gọi A và B là các điểm chung của (d) và (P). Tính diện tích tam giác OAB (O là gốc tọa độ).

Câu 3. *(2,0 điểm)*

Cho phương trình : $x^2 + 2mx + m^2 - 2m + 4 = 0$

1. Giải phương trình khi m = 4.
2. Tìm m để phương trình có hai nghiệm phân biệt.

Câu 4. *(3,0 điểm)*

Cho đường tròn (O) có đường kính AB cố định, M là một điểm thuộc (O) (M khác A và B). Các tiếp tuyến của (O) tại A và M cắt nhau ở C. Đường tròn (I) đi qua M và tiếp xúc với đường thẳng AC tại C. CD là đường kính của (I). Chứng minh rằng :

1. Ba điểm O, M, D thẳng hàng.
2. Tam giác COD là tam giác cân.
3. Đường thẳng đi qua D và vuông góc với BC luôn đi qua một điểm cố định khi M di động trên đường tròn (O).

Câu 5. *(1,0 điểm)*

Cho a, b, c là các số dương không âm thỏa mãn : $a^2 + b^2 + c^2 = 3$.

Chứng minh rằng : $\dfrac{a}{a^2+2b+3} + \dfrac{b}{b^2+2c+3} + \dfrac{c}{c^2+2a+3} \leq \dfrac{1}{2}$.

BÀI GIẢI

Câu 1.

1. $P = \left(\dfrac{\sqrt{a}+1}{\sqrt{a}-1} - \dfrac{\sqrt{a}-1}{\sqrt{a}+1} + 4\sqrt{a}\right)\dfrac{1}{2a\sqrt{a}}$

$$P = \frac{(\sqrt{a}+1)^2 - (\sqrt{a}-1)^2 + 4\sqrt{a}(\sqrt{a}+1)(\sqrt{a}-1)}{(\sqrt{a}+1)(\sqrt{a}-1)} \cdot \frac{1}{2a\sqrt{a}}$$

$$P = \frac{a + 2\sqrt{a} + 1 - a + 2\sqrt{a} - 1 + 4a\sqrt{a} - 4\sqrt{a}}{(\sqrt{a}+1)(\sqrt{a}-1)} \cdot \frac{1}{2a\sqrt{a}}$$

$$P = \frac{4a\sqrt{a}}{a-1} \cdot \frac{1}{2a\sqrt{a}} = \frac{2}{a-1} \text{ (đpcm).}$$

2. $P = a \Rightarrow \dfrac{2}{a-1} = a \Rightarrow a^2 - a - 2 = 0$

Ta có 1 + 1 + (–2) = 0, nên phương trình có hai nghiệm :

$a_1 = -1 < 0$ (không thỏa mãn điều kiện)

$a_2 = \dfrac{-c}{a} = \dfrac{2}{1} = 2$ (thỏa mãn điều kiện)

Vậy : a = 2 thì P = a.

Câu 2.

1. Hoành độ giao điểm đường thẳng (d) và parabol (P) là nghiệm của phương trình : $x^2 = 2x + 3 \Rightarrow x^2 - 2x - 3 = 0$ có $a - b + c = 0$

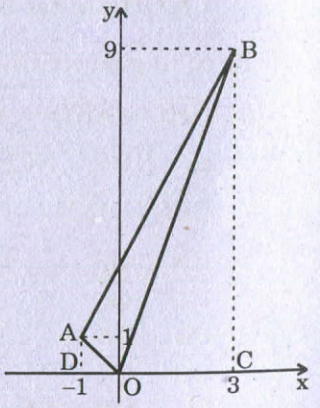
Nên phương trình có hai nghiệm phân biệt $x_1 = -1$ và $x_2 = \dfrac{-c}{a} = \dfrac{3}{1} = 3$

Với $x_1 = -1 \Rightarrow y_1 = (-1)^2 = 1 \Rightarrow A(-1; 1)$

Với $x_2 = 3 \Rightarrow y_2 = 3^2 = 9 \Rightarrow B(3; 9)$

Vậy (d) và (P) có hai điểm chung phân biệt A và B.

2. Ta biểu diễn các điểm A và B trên mặt phẳng tọa độ Oxy như hình vẽ.



$S_{ABCD} = \dfrac{AD + BC}{2}.DC = \dfrac{1+9}{2}.4 = 20$

$S_{BOC} = \dfrac{BC.CO}{2} = \dfrac{9.3}{2} = 13,5$

$S_{AOD} = \dfrac{AD.DO}{2} = \dfrac{1.1}{2} = 0,5$

Theo công thức cộng diện tích ta có :

$S_{ABC} = S_{ABCD} - S_{BCO} - S_{ADO}$

$= 20 - 13,5 - 0,5 = 6$ (đvdt).

Câu 3.

1. Khi m = 4, ta có phương trình $x^2 + 8x + 12 = 0$ có $\Delta' = 16 - 12 = 4 > 0$

Vậy phương trình có hai nghiệm phân biệt :

$x_1 = -4 + 2 = -2$ và $x_2 = -4 - 2 = -6$.

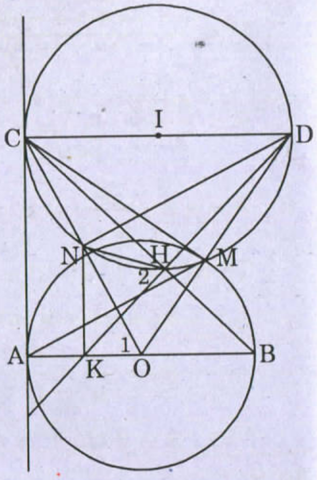
2. $x^2 + 2mx + m^2 - 2m + 4 = 0$ có $D' = m^2 - (m^2 - 2m + 4) = 2m - 4$

Để phương trình có hai nghiệm phân biệt thì D' > 0

$\Rightarrow 2m - 4 > 0 \Rightarrow 2(m-2) > 0 \quad \Rightarrow m - 2 > 0 \quad \Rightarrow m > 2$

Vậy với $m > 2$ thì phương trình có hai nghiệm phân biệt.

Câu 4.



1. Ta có MC là tiếp tuyến của đường tròn (O)

   $\Rightarrow MC \perp MO \qquad (1)$

   Xét đường tròn (I), ta có $\widehat{CMD} = 90^o$

   $\Rightarrow MC \perp MD \qquad (2)$

   Từ (1) và (2) $\Rightarrow$ MO // MD

   $\Rightarrow$ MO và MD trùng nhau

   $\Rightarrow$ O, M, D thẳng hàng.

2. CA là tiếp tuyến của đường tròn (O)

   $\Rightarrow CA \perp AB \qquad (3)$

   Đường tròn (I) tiếp xúc với AC tại C

   $\Rightarrow CA \perp CD \qquad (4)$

   Từ (3) và (4) $\Rightarrow$ CD // AB $\Rightarrow \widehat{DCO} = \widehat{COA}$ (Hai góc so le trong) (*)

   CA, CM là hai tiếp tuyến cắt nhau của (O) $\Rightarrow \widehat{COA} = \widehat{COD}$ (**)

   Từ (*) và (**) $\Rightarrow \widehat{DOC} = \widehat{DCO}$ $\Rightarrow$ Tam giác COD cân tại D.

3. * Gọi chân đường vuông góc hạ từ D tới BC là H thì $\widehat{CHD} = 90^o$

   $\Rightarrow H \in (I)$ (Bài toán quỹ tích)

   DH kéo dài cắt AB tại K. Gọi N là giao điểm của CO và đường tròn (I)

   $$\Rightarrow \begin{cases} \widehat{CND} = 90^o \\ \Delta COD \text{ cân tại D} \end{cases} \Rightarrow NC = NO$$

   Ta có tứ giác NHOK nội tiếp vì có $\widehat{H}_2 = \widehat{O}_1 = \widehat{DCO}$ (cùng bù với $\widehat{DHN}$)

   $\Rightarrow \widehat{NHO} + \widehat{NKO} = 180^o \qquad (5)$

   * Ta có : $\widehat{NDH} = \widehat{NCH}$ (cùng chắn cung NH của đường tròn (I))

   $\widehat{CBO} = \widehat{HND}\ (= \widehat{HCD}) \quad \Rightarrow \Delta DHN \backsim \Delta COB$ (g.g)

   $$\left.\begin{aligned} &\Rightarrow \frac{HN}{HD} = \frac{OB}{OC} \\ &\Rightarrow \frac{OB}{OC} = \frac{OA}{OC} \\ &\Rightarrow \frac{OA}{OC} = \frac{CN}{CD} = \frac{ON}{CD} \end{aligned}\right\} \Rightarrow \frac{HN}{HD} = \frac{ON}{CD} \text{ mà } \widehat{ONH} = \widehat{CDH}$$

   $\Rightarrow \Delta NHO \backsim \Delta DHC$ (c.g.c) $\Rightarrow \widehat{NHO} = 90^o$ mà $\widehat{NHO} + \widehat{NKO} = 180^o$

   $\Rightarrow \widehat{NKO} = 90^o \Rightarrow NK \perp AB \Rightarrow NK \,//\, AC$

   $\Rightarrow$ K là trung điểm của OA cố định $\Rightarrow$ đpcm.

Câu 5.

* Chứng minh bổ đề : $\dfrac{a^2}{x} + \dfrac{b^2}{y} \geq \dfrac{(a+b)^2}{x+y}$ và $\dfrac{a^2}{x} + \dfrac{b^2}{y} + \dfrac{c^2}{z} \geq \dfrac{(a+b+c)^2}{x+y+z}$.

Thật vậy $\dfrac{a^2}{x} + \dfrac{b^2}{y} \geq \dfrac{(a+b)^2}{x+y} \quad \Leftrightarrow (a^2y + b^2x)(x+y) \geq xy(a+b)^2$

$\Leftrightarrow (ay - bx)^2 \geq 0$ (đúng) $\Rightarrow$ đpcm.

Áp dụng lần 2, ta có : $\dfrac{a^2}{x} + \dfrac{b^2}{y} + \dfrac{c^2}{z} \geq \dfrac{(a+b+c)^2}{x+y+z}$.

* Ta có : $a^2 + 2b + 3 = a^2 + 2b + 1 + 2 \geq 2a + 2b + 2$

Tương tự, ta có : ... $\Rightarrow A = \dfrac{a}{a^2+2b+3} + \dfrac{b}{b^2+2c+3} + \dfrac{c}{c^2+2a+3}$

$$\leq \frac{a}{2a+2b+2} + \frac{b}{2b+2c+2} + \frac{c}{2c+2a+2}$$

$$\Leftrightarrow A \leq \frac{1}{2}\underbrace{\left(\frac{a}{a+b+1} + \frac{b}{b+c+1} + \frac{c}{c+a+1}\right)}_{B} \qquad (1)$$

Ta chứng minh $\dfrac{a}{a+b+1} + \dfrac{b}{b+c+1} + \dfrac{c}{c+a+1} \leq 1$

$$\Leftrightarrow \frac{a}{a+b+1} - 1 + \frac{b}{b+c+1} - 1 + \frac{c}{c+a+1} - 1 \leq -2$$

$$\Leftrightarrow \frac{-b-1}{a+b+1} + \frac{-c-1}{b+c+1} + \frac{-a-1}{c+a+1} \leq -2$$

$$\Leftrightarrow \frac{b+1}{a+b+1} + \frac{c+1}{b+c+1} + \frac{a+1}{c+a+1} \geq 2$$

$$\Leftrightarrow \underbrace{\frac{(b+1)^2}{(a+b+1)(b+1)} + \frac{(c+1)^2}{(b+c+1)(c+1)} + \frac{(a+1)^2}{(c+a+1)(a+1)}}_{3-B} \geq 2 \qquad (2)$$

* Áp dụng bổ đề trên ta có :

$$\Rightarrow 3 - B \geq \frac{(a+b+c+3)^2}{(a+b+1)(b+1) + (b+c+1)(c+1) + (c+a+1)(a+1)}$$

$$\Leftrightarrow 3 - B \geq \frac{(a+b+c+3)^2}{a^2+b^2+c^2+ab+bc+ca+3(a+b+c)+3} \qquad (3)$$

* Mà : $2[a^2 + b^2 + c^2 + ab + bc + ca + 3(a+b+c) + 3]$

$= 2a^2 + 2b^2 + 2c^2 + 2ab + 2bc + 2ca + 6a + 6b + 6c + 6$

$= 2a^2 + 2b^2 + 2c^2 + 2ab + 2bc + 2ca + 6a + 6b + 6c + 6$

(do $a^2 + b^2 + c^2 = 3$)

$= a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2bc + 2ca + 6a + 6b + 6c + 9 = (a+b+c+3)^2$

$$\Rightarrow \frac{(a+b+c+3)^2}{a^2+b^2+c^2+ab+bc+ca+3(a+b+c)+3} = 2 \qquad (4)$$

Từ (3) và (4) $\Rightarrow$ (2)

Kết hợp (2) và (1) ta có điều phải chứng minh.

Dấu "=" xảy ra khi $a = b = c = 1$.

ĐỀ THI TUYỂN SINH VÀO LỚP 10 CHUYÊN NGUYỄN TRÃI, HẢI DƯƠNG

Câu 1. *(2,0 điểm)*

1. Giải phương trình $\frac{x-1}{3} = x + 1$.
2. Giải hệ phương trình $\begin{cases} x\sqrt{3} - 3\sqrt{3} = 0 \\ 3x + 2y = 11 \end{cases}$.

Câu 2. *(1,0 điểm)*

Rút gọn biểu thức $P = \left(\frac{1}{2\sqrt{a} - a} + \frac{1}{2 - \sqrt{a}}\right) : \frac{\sqrt{a}+1}{a - 2\sqrt{a}}$ với $a > 0$ và $a \neq 4$.

Câu 3. *(1,0 điểm)*

Một tam giác vuông có chu vi là 30cm, độ dài hai cạnh góc vuông hơn kém nhau 7cm. Tính độ dài các cạnh của tam giác vuông đó.

Câu 4. *(2,0 điểm)*

Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho đường thẳng (d) : $y = 2x - m + 1$ và parabol (P) : $y = \frac{1}{2}x^2$.

1. Tìm m để đường thẳng (d) đi qua điểm $A(-1; 3)$.
2. Tìm m để (d) cắt (P) tại hai điểm phân biệt có tọa độ $(x_1; y_1)$ và $(x_2; y_2)$ sao cho $x_1x_2(y_1 + y_2) + 48 = 0$.

Câu 5. *(3,0 điểm)*

Cho đường tròn tâm O đường kính AB. Trên đường tròn lấy điểm C sao cho $AC < BC$ ($C \neq A$). Các tiếp tuyến tại B và C của (O) cắt nhau ở điểm D, AD cắt (O) tại E ($E \neq A$).

1. Chứng minh $BE^2 = AE.DE$.
2. Qua C kẻ đường thẳng song song với BD cắt AB tại H, DO cắt BC tại F. Chứng minh tứ giác CHOF nội tiếp.
3. Gọi I là giao điểm của AD và CH. Chứng minh I là trung điểm của CH.

Câu 6. *(1,0 điểm)*

Cho hai số dương a, b thỏa mãn $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = 2$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $Q = \frac{1}{a^4 + b^2 + 2ab^2} + \frac{1}{b^4 + a^2 + 2ba^2}$.

BÀI GIẢI

Câu 1.

1. $\frac{x-1}{3} = x + 1 \Leftrightarrow x - 1 = 3(x + 1) \Leftrightarrow x - 1 = 3x + 3$

$$\Leftrightarrow -2x = 4 \Leftrightarrow x = -2$$

Vậy phương trình đã cho có một nghiệm $x = -2$.

2. $\begin{cases} x\sqrt{3} - 3\sqrt{3} = 0 & (1) \\ 3x + 2y = 11 & (2) \end{cases}$

Từ (1) $\Rightarrow x\sqrt{3} = 3\sqrt{3} \Leftrightarrow x = 3$

Thay $x = 3$ vào (2) $\Rightarrow 3.3 + 2y = 11 \Leftrightarrow 2y = 2 \Leftrightarrow y = 1$

Vậy hệ phương trình đã cho có nghiệm $(x; y) = (3; 1)$.

Câu 2. $P = \left[\frac{1}{\sqrt{a}(2-\sqrt{a})} + \frac{1}{2-\sqrt{a}}\right] : \frac{\sqrt{a}+1}{a-2\sqrt{a}} = \frac{1+\sqrt{a}}{\sqrt{a}(2-\sqrt{a})} \cdot \frac{a-2\sqrt{a}}{\sqrt{a}+1}$

$$= \frac{\sqrt{a}(\sqrt{a}-2)}{\sqrt{a}(2-\sqrt{a})} = \frac{\sqrt{a}-2}{2-\sqrt{a}} = -1.$$

Câu 3. Gọi độ dài cạnh góc vuông nhỏ là x (cm) (điều kiện $0 < x < 15$)

$\Rightarrow$ độ dài cạnh góc vuông còn lại là $(x + 7)$ (cm)

Vì chu vi của tam giác là 30cm nên độ dài cạnh huyền là :

$$30 - (x + x + 7) = 23 - 2x \text{ (cm)}$$

Theo định lí Pi-ta-go ta có phương trình :

$$x^2 + (x + 7)^2 = (23 - 2x)^2 \Leftrightarrow x^2 - 53x + 240 = 0 \qquad (1)$$

Giải phương trình (1) được nghiệm $x = 5$; $x = 48$

Đối chiếu với điều kiện có $x = 5$ (thỏa mãn điều kiện); $x = 48$ (không thỏa mãn điều kiện).

Vậy độ dài một cạnh góc vuông là 5cm, độ dài cạnh góc vuông còn lại là 12cm, độ dài cạnh huyền là : $30 - (5 + 12) = 13$cm.

Câu 4.

1. Vì (d) đi qua điểm $A(-1; 3)$ nên thay $x = -1$ và $y = 3$ vào hàm số $y = 2x - m + 1$, ta có :

$$2.(-1) - m + 1 = 3 \Leftrightarrow -1 - m = 3 \Leftrightarrow m = -4$$

Vậy $m = -4$ thì (d) đi qua điểm $A(-1; 3)$.

2. Hoành độ giao điểm của (d) và (P) là nghiệm của phương trình :

$$\frac{1}{2}x^2 = 2x - m + 1 \Leftrightarrow x^2 - 4x + 2m - 2 = 0 \qquad (1)$$

Để (d) cắt (P) tại hai điểm phân biệt nên (1) có hai nghiệm phân biệt

$\Leftrightarrow \Delta' > 0 \Leftrightarrow 6 - 2m > 0 \Leftrightarrow m < 3$

Vì $(x_1; y_1)$ và $(x_2; y_2)$ là tọa độ giao điểm của (d) và (P) nên x_1, x_2 là nghiệm của phương trình (1) và $y_1 = 2x_1 - m + 1$; $y_2 = 2x_2 - m + 1$

Theo hệ thức Vi-et ta có : $x_1 + x_2 = 4$, $x_1x_2 = 2m - 2$.

Thay y_1, y_2 vào $x_1x_2(y_1 + y_2) + 48 = 0$ có :

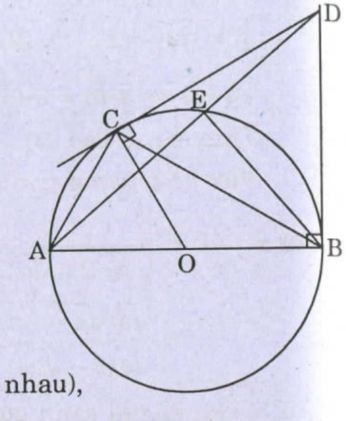
$$x_1x_2(2x_1 + 2x_2 - 2m + 2) + 48 = 0$$

$$\Rightarrow (2m - 2)(10 - 2m) + 48 = 0 \quad \Leftrightarrow m^2 - 6m - 7 = 0$$

$\Leftrightarrow m = -1$ (thỏa mãn $m < 3$) hoặc $m = 7$ (không thỏa mãn $m < 3$)

Vậy $m = -1$ thỏa mãn đề bài.

Câu 5.



1. Vẽ đúng hình theo yêu cầu chung của đề bài.

Vì BD là tiếp tuyến của (O) nên $BD \perp OB$

$\Rightarrow \Delta ABD$ vuông tại B

Vì AB là đường kính của (O) nên $AE \perp BE$

Áp dụng hệ thức lượng trong ΔABD

$(\widehat{ABD} = 90^\circ$; $BE \perp AD)$ ta có :

$BE^2 = AE.DE$.

2. Ta có DB = DC (tính chất hai tiếp tuyến cắt nhau),

OB = OC (bán kính của (O))

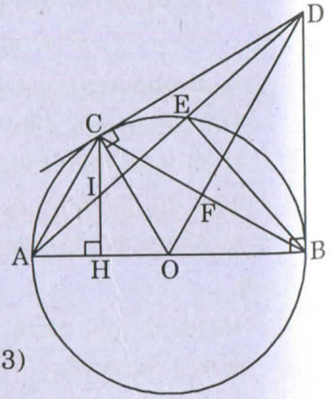
$\Rightarrow$ OD là đường trung trực của đoạn BC $\Rightarrow \widehat{OFC} = 90^\circ$ (1)

Ta có CH // BD (gt), mà $AB \perp BD$ (vì BD là tiếp tuyến của (O))

$\Rightarrow CH \perp AB \quad \Rightarrow \widehat{OHC} = 90^\circ$ (2)

Từ (1) và (2) ta có $\widehat{OFC} + \widehat{OHC} = 180^\circ$

$\Rightarrow$ Tứ giác CHOF nội tiếp.



3. Ta có CH // BD $\Rightarrow \widehat{HCB} = \widehat{CBD}$ (hai góc ở vị trí so le trong) mà ΔBCD cân tại D

$\Rightarrow \widehat{CBD} = \widehat{DCB}$ nên CB là tia phân giác của $\widehat{HCD}$

Do $CA \perp CB \Rightarrow$ CA là tia phân giác góc ngoài đỉnh C của $\Delta ICD \quad \Rightarrow \dfrac{AI}{AD} = \dfrac{CI}{CD}$ (3)

Trong ΔABD có HI // BD $\Rightarrow \dfrac{AI}{AD} = \dfrac{HI}{BD}$ (4)

Từ (3) và (4) $\Rightarrow \dfrac{CI}{CD} = \dfrac{HI}{BD}$ mà CD = BD

$\Rightarrow CI = HI \Rightarrow$ I là trung điểm của CH.

Câu 6. Với a > 0; b > 0 ta có :

$$(a^2 - b)^2 \geq 0 \Leftrightarrow a^4 - 2a^2b + b^2 \geq 0 \Rightarrow a^4 + b^2 \geq 2a^2b$$

$$\Leftrightarrow a^4 + b^2 + 2ab^2 \geq 2a^2b + 2ab^2 \Leftrightarrow \frac{1}{a^4 + b^2 + 2ab^2} \leq \frac{1}{2ab(a+b)} \quad (1)$$

Tương tự có : $\dfrac{1}{b^4 + a^2 + 2a^2b} \leq \dfrac{1}{2ab(a+b)}$ (2)

Từ (1) và (2) $\Rightarrow Q \leq \dfrac{1}{ab(a+b)}$

Vì $\dfrac{1}{a} + \dfrac{1}{b} = 2 \Leftrightarrow a + b = 2ab$ mà $a + b \geq 2\sqrt{ab} \Leftrightarrow ab \geq 1$

$$\Rightarrow Q \leq \frac{1}{2(ab)^2} \leq \frac{1}{2}.$$

Khi a = b = 1 thì $\Rightarrow Q = \dfrac{1}{2}$. Vậy giá trị lớn nhất của biểu thức là $\dfrac{1}{2}$.

ĐỀ THI TUYỂN SINH VÀO LỚP 10 CHUYÊN LƯƠNG THẾ VINH, ĐỒNG NAI

ĐỀ 1

Câu 1. *(2,5 điểm)*

1. Giải các phương trình :

a) $x^4 - x^2 - 20 = 0$ b) $\sqrt{x+1} = x - 1$.

2. Giải hệ phương trình : $\begin{cases} |x| + |y - 3| = 1 \\ y - |x| = 3 \end{cases}$.

Câu 2. *(2,0 điểm)*

Cho parabol (P) : $y = x^2$ và đường thẳng (d) : $y = mx$, với m là tham số.

1. Tìm các giá trị của m để (P) và (d) cắt nhau tại điểm có tung độ bằng 9.
2. Tìm các giá trị của m để (P) và (d) cắt nhau tại 2 điểm, mà khoảng cách giữa hai điểm này bằng $\sqrt{6}$.

Câu 3. *(2,0 điểm)*

1. Tính : $P = \left(\dfrac{1}{2 - \sqrt{3}} - \dfrac{1}{2 + \sqrt{3}}\right) \cdot \dfrac{\sqrt{3} - 1}{3 - \sqrt{3}}$.
2. Chứng minh : $a^5 + b^5 \geq a^3b^2 + a^2b^3$, biết rằng $a + b \geq 0$.

Câu 4. *(3,5 điểm)*

Cho tam giác ABC vuông ở A, đường cao AH. Vẽ đường tròn tâm O, đường kính AH, đường tròn này cắt cạnh AB, AC theo thứ tự tại D và E.

1. Chứng minh tứ giác BDEC là tứ giác nội tiếp được đường tròn.
2. Chứng minh ba điểm D, O, E thẳng hàng.

3. Cho biết AB = 3cm, BC = 5cm. Tính diện tích tứ giác BDEC.

BÀI GIẢI

Câu 1.

1. a) $x^4 - x^2 - 20 = 0$ (*) Đặt $x^2 = t$; $(t \ge 0)$

$(*) \Leftrightarrow t^2 - t - 20 = 0 \Leftrightarrow t_1 = 5$ (nhận) $\vee$ $t_2 = -4$ (loại)

Với $t = 5 \Rightarrow x^2 = 5 \Leftrightarrow x = \pm\sqrt{5}$

Vậy phương trình có hai nghiệm $x = \sqrt{5}$ và $x = -\sqrt{5}$.

b) $\sqrt{x+1} = x - 1$ (điều kiện $x \ge 1$)

$(\sqrt{x+1})^2 = (x-1)^2 \Rightarrow x + 1 = x^2 - 2x + 1 \Leftrightarrow x^2 - 3x = 0$

$\Leftrightarrow x(x-3) = 0 \Leftrightarrow x = 0$ (loại) $\vee$ $x = 3$ (nhận)

Vậy phương trình có một nghiệm x = 3.

2. $$\begin{cases} |x| + |y-3| = 1 \\ y - |x| = 3 \end{cases}$$

Từ $y - |x| = 3 \Leftrightarrow y - 3 = |x| \Rightarrow y - 3 \ge 0 \Rightarrow |y-3| = y - 3$

$$\begin{cases} |x| + |y-3| = 1 \\ y - |x| = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} |x| + y - 3 = 1 \\ y - |x| = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} |x| + y = 4 \\ y - |x| = 3 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2|x| = 1 \\ y = |x| + 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \pm\dfrac{1}{2} \\ y = \dfrac{7}{2} \end{cases} \text{(nhận)}$$

Vậy hệ phương trình có hai nghiệm (x; y) : $\left(\frac{1}{2}; \frac{7}{2}\right)$, $\left(-\frac{1}{2}; \frac{7}{2}\right)$.

Câu 2.

1. Phương trình hoành độ giao điểm (P) và (d) :

$$x^2 - mx = 0 \Leftrightarrow x(x - m) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x_1 = 0 \\ x_2 = m \end{array}\right.$$

Vì giao điểm thuộc (P) : $y = x^2 \Rightarrow y = m^2$

Với $y = 9 \Rightarrow m^2 = 9 \Leftrightarrow m = 3 \vee m = -3$

Vậy với $m = \pm 3$ thì (P) và (d) cắt nhau tại điểm có tung độ bằng 9.

2. Từ câu 1 $\Rightarrow$ (P) và (d) luôn cắt nhau tại hai điểm phân biệt khi $m \ne 0$.

Khi đó giao điểm thứ nhất là gốc tọa độ O (x = 0, y = 0), giao điểm thứ hai là điểm A có ($x = m$; $y = m^2$).

Khoảng cách giữa hai giao điểm :

$$AO = \sqrt{m^2 + m^4} = \sqrt{6} \Leftrightarrow m^4 + m^2 - 6 = 0 \qquad (1)$$

Đặt $t = m^2$ $(t \ge 0)$

$(1) \Leftrightarrow t^2 + t - 6 = 0 \Leftrightarrow t_1 = 3$ (nhận) $\vee$ $t_2 = -2$ (loại)

Với $t_1 = 3 \Leftrightarrow m^2 = 3 \Leftrightarrow m = \pm\sqrt{3}$ (nhận)

Vậy với $m = \pm\sqrt{3}$ thì (P) cắt (d) tại hai điểm có khoảng cách bằng $\sqrt{6}$.

Câu 3.

1. $$P = \left(\frac{1}{2-\sqrt{3}} - \frac{1}{2+\sqrt{3}}\right) \cdot \frac{\sqrt{3}-1}{3-\sqrt{3}} = \frac{2+\sqrt{3}-2+\sqrt{3}}{4-3} \cdot \frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}(\sqrt{3}-1)} = 2.$$

2. Ta có : $a^5 + b^5 \ge a^3b^2 + a^2b^3 \Leftrightarrow a^5 + b^5 - a^3b^2 - a^2b^3 \ge 0$

$\Leftrightarrow a^3(a^2 - b^2) - b^3(a^2 - b^2) \ge 0 \Leftrightarrow (a^3 - b^3)(a^2 - b^2) \ge 0$

$\Leftrightarrow (a-b)^2(a+b)(a^2 + b^2 + ab) \ge 0$

Vì : $(a-b)^2 \ge 0$ (với mọi a, b $\in \mathbb{R}$)

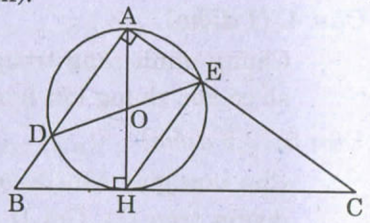
$a + b \ge 0$ (theo giả thiết)

$a^2 + b^2 + ab \ge 0$ (với mọi a, b $\in \mathbb{R}$)

Nên bất đẳng thức cuối đúng.

Vậy $a^5 + b^5 \ge a^3b^2 + a^2b^3$ với $a + b \ge 0$ (đpcm).

Câu 4.



1. Nối H với E.

+ $\widehat{HEA} = 90^\circ$ (vì AH là đường kính),

$\widehat{AHC} = 90^\circ$ (AH là đường cao)

$\Rightarrow \widehat{AHE} = \widehat{ACB}$ (cùng phụ với $\widehat{EHC}$) (1)

+ $\widehat{ADE} = \widehat{AHE}$ (góc nội tiếp cùng chắn cung AE) (2)

Từ (1) và (2) $\Rightarrow \widehat{ADE} = \widehat{ACB} \Rightarrow$ Tứ giác BDEC nội tiếp đường tròn (có góc đối bằng góc kề bù góc đối).

2. Vì $\widehat{DAE} = 90^\circ \Rightarrow$ DE là đường kính $\Rightarrow$ D, O, E thẳng hàng (đpcm).

3. Ta có : $S_{BDEC} = S_{\Delta ABC} - S_{\Delta ADE}$

+ ΔABC vuông có AH là đường cao :

$$AC = \sqrt{BC^2 - AB^2} = 4\text{cm} \Rightarrow S_{\Delta ABC} = \frac{AB.AC}{2} = 6\,(\text{cm}^2)$$

$$DE = AH = \frac{AB.AC}{BC} = \frac{12}{5}\ (\text{cm}) \text{ (cùng là đường kính đường tròn O).}$$

+ ΔADE và $\Delta ABCD$ có : $\widehat{A}$ chung, $\widehat{ADE} = \widehat{ACB}$ (câu 1)

$\Rightarrow \Delta ADE \backsim \Delta ABC$ (g.g)

$\Rightarrow$ Tỉ số diện tích bằng bình phương tỉ số đồng dạng

$$\Leftrightarrow \frac{S_{\Delta AED}}{S_{\Delta ABC}} = \left(\frac{DE}{BC}\right)^2 \Leftrightarrow S_{\Delta AED} = \frac{S_{\Delta ABC}.DE^2}{BC^2}$$

+ $$S_{BDEC} = S_{\Delta ABC} - S_{\Delta ADE} = S_{\Delta ABC}\left(1 - \frac{DE^2}{BC^2}\right) = 6\left(1 - \frac{12^2}{5^2.5^2}\right) = 4{,}6176\ (\text{cm}^2).$$

ĐỀ 2

âu 1. *(1,5 điểm)*

Cho phương trình : $x^4 - 16x^2 + 32 = 0$ (với $x \in \mathbb{R}$)

Chứng minh rằng : $x = \sqrt{6 - 3\sqrt{2+\sqrt{3}}} - \sqrt{2 + \sqrt{2+\sqrt{3}}}$ là một nghiệm của phương trình đã cho.

Câu 2. *(2,5 điểm)*

Giải hệ phương trình $\begin{cases} 2x(x+1)(y+1) + xy = -6 \\ 2y(y+1)(x+1) + y = 6 \end{cases}$ (với $x \in \mathbb{R}$, $y \in \mathbb{R}$).

Câu 3. *(1,5 điểm)*

Cho tam giác đều MNP có cạnh bằng 2cm. Lấy n điểm thuộc các cạnh hoặc ở phía trong tam giác đều MNP sao cho khoảng cách giữa hai điểm tùy ý lớn hơn 1cm (với n là số nguyên dương). Tìm n lớn nhất thỏa mãn điều kiện đã cho.

Câu 4. *(1 điểm)*

Chứng minh rằng trong 10 số nguyên dương liên tiếp không tồn tại hai số có ước chung lớn hơn 9.

Câu 5, *(3,5 điểm)*

Cho tam giác ABC không là tam giác cân, biết tam giác ABC ngoại tiếp đường tròn (I). Gọi D, E, F lần lượt là các tiếp điểm của BC, CA, AB với đường tròn (I). Gọi M là giao điểm của đường thẳng EF và đường thẳng BC, biết AD cắt đường tròn (I) tại điểm N (N không trùng với D), gọi K là giao điểm của AI và EF.

1. Chứng minh rằng các điểm I, D, N, K cùng thuộc một đường tròn.
2. Chứng minh MN là tiếp tuyến của đường tròn (I).

BÀI GIẢI

Câu 1. Phương trình đã cho : $x^4 - 16x^2 + 32 = 0$ (với $x \in \mathbb{R}$)

$$\Leftrightarrow (x^2 - 8)^2 - 32 = 0 \qquad (1)$$

Với $x = \sqrt{6 - 3\sqrt{2+\sqrt{3}}} - \sqrt{2 + \sqrt{2+\sqrt{3}}}$

$\Leftrightarrow x = \sqrt{3}\sqrt{2 - \sqrt{2+\sqrt{3}}} - \sqrt{2 + \sqrt{2+\sqrt{3}}}$

$\Leftrightarrow x^2 = 8 - 2\sqrt{2+\sqrt{3}} - 2\sqrt{3}\sqrt{2-\sqrt{3}}$

Thế x vào vế phải của (1) ta có :

$(x^2 - 8)^2 - 32 = (8 - 2\sqrt{2+\sqrt{3}} - 2\sqrt{3}\sqrt{2-\sqrt{3}} - 8)^2 - 32$

$= 4(2 + \sqrt{3}) + 4\sqrt{3} + 12(2 - \sqrt{3}) - 32$

$= 8 + 4\sqrt{3} + 8\sqrt{3} + 24 - 12\sqrt{3} - 32 = 0$ (vế phải bằng vế trái)

Vậy $x = \sqrt{6 - 3\sqrt{2+\sqrt{3}}} - \sqrt{2 + \sqrt{2+\sqrt{3}}}$ là một nghiệm của phương trình đã cho (đpcm).

Câu 2. Hệ phương trình đã cho $\begin{cases} 2x(x+1)(y+1) + xy = -6 & (1) \\ 2y(y+1)(x+1) + yx = 6 & (2) \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x(x+1)(y+1) = -6 - xy \\ 2y(y+1)(x+1) = 6 - xy \end{cases}$$

Thay $x = 0$, $y = 0$ thì hệ không thỏa.

Thay $x = -1$ và $y = -1$ vào hệ không thỏa

$\Rightarrow (x; y) \neq (0; 0)$, $xy \neq 0$, $x + 1 \neq 0$, $y + 1 \neq 0 \Rightarrow 6 - xy \neq 0 \qquad (*)$

- Chia từng vế của hai phương trình cho nhau :

$$\Rightarrow \frac{x}{y} = \frac{-6 - xy}{6 - xy} \quad \Leftrightarrow xy(x - y) = 6(x + y)$$

Thay $x = y$, hệ phương trình có vế phải bằng nhau, vế trái khác nhau (không thỏa) $\Rightarrow x - y \neq 0 \qquad (**)$

$$\Rightarrow xy = \frac{6(x+y)}{x-y} \qquad (3)$$

- Cộng từng vế (1) và (2) của hệ ta được phương trình :

$$2(x + y)(x + 1)(y + 1) + 2xy = 0 \qquad (4)$$

$$\Leftrightarrow (x + y)(x + y + xy + 1) + xy = 0$$

$$\Leftrightarrow (x+y)\left(x + y + 1 + \frac{6(x+y)}{x-y}\right) + \frac{6(x+y)}{x-y} = 0$$

$$\Leftrightarrow (x+y)\left(x + y + 1 + \frac{6(x+y+1)}{x-y}\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow (x+y)(x+y+1)\left(1 + \frac{6}{x-y}\right) = 0 \quad \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x + y = 0 \\ x + y + 1 = 0 \\ 1 + \dfrac{6}{x-y} = 0 \end{array}\right.$$

- Với $x + y = 0 \Leftrightarrow x = -y$. Thế vào hệ $\Rightarrow -2y^2 = 0 \Leftrightarrow y = 0 \vee x = 0$ không thỏa (*)
- Với $x + y + 1 = 0 \Leftrightarrow x = -y - 1$. Thế vào phương trình (1) của hệ ta được :

$$2y^3 + 3y^2 + y + 6 = 0 \quad \Leftrightarrow (y + 2)(2y^2 - y + 3) = 0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y + 2 = 0 \Leftrightarrow y = -2 \\ 2y^2 - y + 3 = 0 \text{ (vn)} \end{array}\right.$$

Với $y = -2 \Rightarrow x = 1$. Thế vào hệ thỏa, vậy có nghiệm 1 : $(x; y) = (1; -2)$

- Với $1 + \dfrac{6}{x-y} = 0 \Leftrightarrow x - y + 6 = 0 \Leftrightarrow x = y - 6$.

Thế vào phương trình (2) của hệ :

$$(2) \Leftrightarrow 2y^3 - 7y^2 - 16y - 6 = 0 \Leftrightarrow (2y+1)(y^2 - 4y - 6) = 0$$

$$\Rightarrow \left[\begin{array}{l} 2y + 1 = 0 \\ y^2 - 4y - 6 = 0 \end{array}\right.$$

$$y^2 - 4y - 6 = 0 \quad \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y_1 = 2 + \sqrt{10} \\ y_2 = 2 - \sqrt{10} \end{array}\right.$$

$$2y + 1 = 0 \quad \Leftrightarrow y_3 = -\frac{1}{2}$$

Từ ba giá trị của y ở trên ta tìm được ba giá trị x tương ứng :

$$\left[\begin{array}{l} x_1 = -4 + \sqrt{10} \\ x_2 = -4 - \sqrt{10} \\ x_3 = -\dfrac{13}{2} \end{array}\right.$$

Thế các giá trị (x; y) tìm được vào hệ (thỏa).

Vậy hệ phương trình đã cho có bốn nghiệm (x; y) :

$$(1; -2),\ (-4 + \sqrt{10}; 2 + \sqrt{10}),\ (-4 - \sqrt{10}; 2 - \sqrt{10}),\ \left(-\frac{13}{2}; -\frac{1}{2}\right).$$

Câu 3.

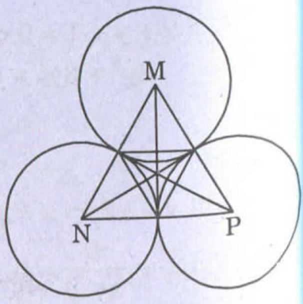
* *Cách 1:* Tam giác đều có cạnh bằng 2cm thì diện tích bằng $\sqrt{3}\,\text{cm}^2$, tam giác đều có cạnh bằng 1cm thì diện tích bằng $\dfrac{\sqrt{3}}{4}\,\text{cm}^2$. Nếu tam giác đều có cạnh > 1cm thì diện tích > $\dfrac{\sqrt{3}}{4}\,\text{cm}^2$.

Gọi t là số tam giác đều có cạnh bằng > 1cm chứa được trong tam giác đều có cạnh 2cm : $1 \le t < 4$ (với t là số nguyên dương) $\Rightarrow t_{\max} = 3$

Theo nguyên lí Drichen sẽ có một trong t tam giác đều có cạnh > 1cm đó chứa tối đa hai điểm thỏa mãn khoảng cách giữa hai điểm bất kì luôn > 1cm.

Vậy số điểm thỏa yêu cầu bài toán là : $2 \le n \le 4$. Vậy $n_{\max} = 4$.

* *Cách 2 :* Giải theo kiến thức hình học



Nếu ta chọn ba điểm ở ba đỉnh của tam giác đều cạnh bằng 2cm, vẽ ba đường tròn đường kính 1cm, các đường tròn này tiếp xúc với nhau ở trung điểm mỗi cạnh tam giác ⇒ Các điểm khác trong tam giác cách ba đỉnh > 1cm chỉ có thể nằm trong phần diện tích còn lại của tam giác (ngoài phần diện tích bị ba hình tròn che phủ), được giới hạn bởi ba cung tròn bán kính 1cm.

Vì ba dây cung là ba đường trung bình của tam giác có độ dài 1cm ⇒ Khoảng cách giữa hai điểm bất kì nằm trong phần diện tích còn lại đó của tam giác luôn ≤ 1cm.

⇒ Trong phần diện tích đó chỉ lấy được một điểm mà khoảng cách đến ba đỉnh của tam giác luôn > 1cm.

Vậy số điểm lớn nhất thỏa mãn khoảng cách giữa hai điểm bất kì > 1cm là : $n_{\max} = 3 + 1 = 4$ điểm.

Câu 4. Gọi a và b là hai số bất kì trong mười số nguyên dương liên tiếp với a > b (a; b nguyên dương) $\Rightarrow 1 \le a - b \le 9$.

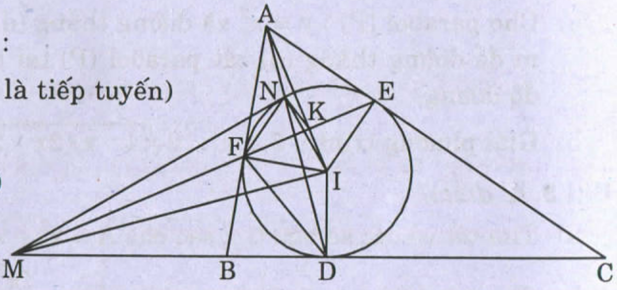
Gọi n là ước chung của a và b, khi đó : a = n.x và b = n.y (n, x, y là số nguyên dương).

Vì $a > b \Rightarrow x > y \Rightarrow x - y \ge 1 \Rightarrow 1 \le n.x - n.y \le 9$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{n} \le x - y \le \frac{9}{n} \;\Rightarrow\; \frac{9}{n} \ge 1 \Leftrightarrow n \le 9$$

Vậy trong mười số nguyên dương liên tiếp không tồn tại hai số có ước chung lớn hơn 9.

Câu 5.



1. Nối N và F, D và F.

- Xét ΔANF và ΔAFD có :

$\widehat{AFN} = \widehat{ADF}$ (vì AF là tiếp tuyến)

và $\widehat{FAD}$ chung

⇒ ΔANF ∽ ΔAFD (g.g)

$$\Rightarrow \frac{AN}{AF} = \frac{AF}{AD}$$

$\Leftrightarrow AF^2 = AN.AD$ (1)

- Xét ΔAFI có AF ⊥ IF (vì AF tiếp tuyến, FI là bán kính) và FK ⊥ AI (vì AF và AE tiếp tuyến chung và AI nối tâm)

⇒ ΔAFI vuông tại F có FK là đường cao $\Rightarrow AK.AI = AF^2$ (2)

Từ (1) và (2) $\Rightarrow AN.AD = AK.AI \Rightarrow \dfrac{AN}{AK} = \dfrac{AI}{AD}$

- Xét ΔANK và ΔAID có $\widehat{IAD}$ chung và $\dfrac{AN}{AK} = \dfrac{AI}{AD}$

⇒ ΔANK ∽ ΔAID (c.g.c) $\Rightarrow \widehat{NKA} = \widehat{IDN}$ (3)

- Từ (3) ⇒ Tứ giác DIKN nội tiếp đường tròn (vì có góc đối bằng góc kề bù góc đối)

⇒ Các điểm I, D, N, K cùng thuộc một đường tròn (đpcm).

2. Ta có ID ⊥ DM (DM là tiếp tuyến, DI là bán kính) và IK ⊥ KM (câu 1)

⇒ Tứ giác DIKM nội tiếp đường tròn đường kính MI.

Vì bốn điểm D, I, K, N cũng thuộc một đường tròn (câu 1)

$\Rightarrow$ Hai đường tròn này cùng ngoại tiếp ΔDIK

$\Rightarrow$ Hai đường tròn trùng nhau

$\Rightarrow$ N cũng nằm trên đường tròn đường kính MI $\Rightarrow \widehat{INM} = 90^\circ$.

Vì IN là bán kính đường tròn (I), $MN \perp IN \Rightarrow$ MN là tiếp tuyến của đường tròn (I) tại tiếp điểm N (đpcm).

ĐỀ THI TUYỂN SINH VÀO LỚP 10 CHUYÊN TỈNH HƯNG YÊN

Bài 1. *(2 điểm)*

a) Cho $A = \sqrt{2012^2 + 2012^2.2013^2 + 2013^2}$. Chứng minh A là một số tự nhiên.

b) Giải hệ phương trình $\begin{cases} x^2 + \dfrac{1}{y^2} + \dfrac{x}{y} = 3 \\ x + \dfrac{1}{y} + \dfrac{x}{y} = 3 \end{cases}$.

Bài 2. *(2 điểm)*

a) Cho parabol (P) : $y = x^2$ và đường thẳng (d) : $y = (m + 2)x - m + 6$. Tìm m để đường thẳng (d) cắt parabol (P) tại hai điểm phân biệt có hoành độ dương.

b) Giải phương trình : $5 + x + 2\sqrt{(4 - x)(2x - 2)} = 4(\sqrt{4 - x} + \sqrt{2x - 2})$.

Bài 3. *(2 điểm)*

a) Tìm tất cả các số hữu tỉ x sao cho $A = x^2 + x + 6$ là một số chính phương.

b) Cho $x > 1$ và $y > 1$. Chứng minh rằng : $\dfrac{(x^3 + y^3) - (x^2 + y^2)}{(x - 1)(y - 1)} \geq 8$.

Bài 4. *(3 điểm)*

Cho tam giác ABC nhọn nội tiếp đường tròn tâm O, đường cao BE và CF. Tiếp tuyến tại B và C cắt nhau tại S, gọi BC và OS cắt nhau tại M.

a) Chứng minh AB.MB = AE.BS.

b) Hai tam giác AEM và ABS đồng dạng.

c) Gọi AM cắt EF tại N, AS cắt BC tại P. Chứng minh rằng NP vuông góc với BC.

Bài 5. *(1 điểm)*

Trong một giải bóng đá có 12 đội tham dự, thi đấu vòng tròn một lượt (hai đội bất kì thi đấu với nhau đúng một trận).

a) Chứng minh rằng sau bốn vòng đấu (mỗi đội thi đấu đúng 4 trận) luôn tìm được ba đội bóng đôi một chưa thi đấu với nhau.

b) Khẳng định trên còn đúng không nếu các đội đã thi đấu 5 trận ?

BÀI GIẢI

Bài 1.

a) Đặt 2012 = a, ta có :

$$\sqrt{2012^2 + 2012^2.2013^2 + 2013^2} = \sqrt{a^2 + a^2(a + 1)^2 + (a + 1)^2}$$
$$= \sqrt{(a^2 + a + 1)^2} = a^2 + a + 1.$$

b) Đặt $\begin{cases} \dfrac{x}{y} = a \\ x + \dfrac{1}{y} = b \end{cases}$ Ta có $\begin{cases} x^2 + \dfrac{1}{y^2} + \dfrac{x}{y} = 3 \\ x + \dfrac{1}{y} + \dfrac{x}{y} = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left(x + \dfrac{1}{y}\right)^2 - \dfrac{x}{y} = 3 \\ x + \dfrac{1}{y} + \dfrac{x}{y} = 3 \end{cases}$

nên $\begin{cases} b^2 - a = 3 \\ b + a = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b^2 + b - 6 = 0 \\ b + a = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 6 \\ b = -3 \end{cases} \vee \begin{cases} a = 1 \\ b = 2 \end{cases}$.

Bài 2.

a) Yêu cầu bài toán tương đương với phương trình :

$$x^2 = (m + 2)x - m + 6 \text{ hay } x^2 - (m + 2)x + m - 6 = 0$$

có hai nghiệm dương phân biệt.

b) Đặt $t = \sqrt{4 - x} + \sqrt{2x - 2}$.

Bài 3.

a) $x = 0$, $x = 1$, $x = -1$ không thỏa mãn. Với x khác các giá trị này, trước hết ta chứng minh x phải là số nguyên.

+ $x^2 + x + 6$ là một số chính phương nên $x^2 + x$ phải là số nguyên.

+ Giả sử $x = \dfrac{m}{n}$ với m và n có ước nguyên lớn nhất là 1.

Ta có : $x^2 + x = \dfrac{m^2}{n^2} + \dfrac{m}{n} = \dfrac{m^2 + mn}{n^2}$ là số nguyên khi $m^2 + mn$ chia hết cho n^2 nên $m^2 + mn$ chia hết cho n, vì mn chia hết cho n nên m^2 chia hết cho n và do m và n có ước nguyên lớn nhất là 1, suy ra m chia hết cho n (mâu thuẫn với m và n có ước nguyên lớn nhất là 1). Do đó x phải là số nguyên.

Đặt $x^2 + x + 6 = k^2$, ta có : $4x^2 + 4x + 24 = 4k^2$ hay $(2x + 1)^2 + 23 = 4k^2$ tương đương với $4k^2 - (2x + 1)^2 = 23$

$$\frac{(x^3 + y^3) - (x^2 + y^2)}{(x - 1)(y - 1)} = \frac{x^2(x - 1) + y^2(y - 1)}{(x - 1)(y - 1)} = \frac{x^2}{y - 1} + \frac{y^2}{x - 1}$$

$$= \frac{(x - 1)^2 + 2(x - 1) + 1}{y - 1} + \frac{(y - 1)^2 + 2(y - 1) + 1}{x - 1}$$

$$= \left[\frac{(x - 1)^2}{y - 1} + \frac{(y - 1)^2}{x - 1}\right] + \left[\frac{2(y - 1)}{x - 1} + \frac{2(x - 1)}{y - 1}\right] + \left[\frac{1}{y - 1} + \frac{1}{x - 1}\right].$$

Theo BĐT Côsi

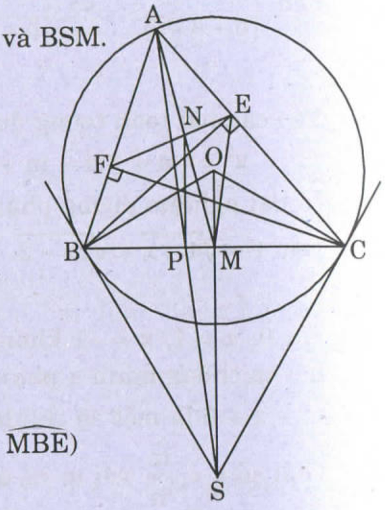
$$\frac{(x-1)^2}{y-1}+\frac{(y-1)^2}{x-1}\ge 2\sqrt{\frac{(x-1)^2}{y-1}\cdot\frac{(y-1)^2}{x-1}}=2\sqrt{(x-1)(y-1)}$$

$$\frac{2(y-1)}{x-1}+\frac{2(x-1)}{y-1}\ge\sqrt{\frac{2(y-1)}{x-1}\cdot\frac{2(x-1)}{y-1}}=4$$

$$\frac{1}{y-1}+\frac{1}{x-1}\ge 2\sqrt{\frac{1}{y-1}\cdot\frac{1}{x-1}}$$

$$2\left[\sqrt{\frac{1}{y-1}\cdot\frac{1}{x-1}}+\sqrt{(x-1)(y-1)}\right]\ge 2.2\sqrt{\sqrt{\frac{1}{y-1}\cdot\frac{1}{x-1}}.\sqrt{(x-1)(y-1)}}=4.$$

Bài 4.



a) Suy ra từ hai tam giác đồng dạng là ABE và BSM.

b) Từ câu a) ta có $\frac{AE}{AB}=\frac{MB}{BS}$ (1)

Mà MB = EM (do tam giác BEC vuông tại E có M là trung điểm của BC)

Nên $\frac{AE}{AB}=\frac{EM}{BS}$

Ta có $\widehat{MOB}=\widehat{BAE}$, $\widehat{EBA}+\widehat{BAE}=90^\circ$,

$\widehat{MBO}+\widehat{MOB}=90^\circ$

Nên $\widehat{MBO}=\widehat{EBA}$ do đó $\widehat{MEB}=\widehat{OBA}$ $(=\widehat{MBE})$

Suy ra $\widehat{MEA}=\widehat{SBA}$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra hai tam giác AEM và ABS đồng dạng (đpcm).

c) Dễ thấy SM vuông góc với BC nên để chứng minh bài toán ta chứng minh NP // SM.

Xét hai tam giác ANE và APB :

Từ câu b) ta có hai tam giác AEM và ABS đồng dạng nên $\widehat{NAE}=\widehat{PAB}$

Mà $\widehat{AEN}=\widehat{ABP}$ (do tứ giác BCEF nội tiếp)

Do đó hai tam giác ANE và APB đồng dạng nên $\frac{AN}{AP}=\frac{AE}{AB}$

Lại có $\frac{AM}{AS}=\frac{AE}{AB}$ (hai tam giác AEM và ABS đồng dạng)

Suy ra $\frac{AM}{AS}=\frac{AN}{AP}$ nên trong tam giác AMS có NP // SM (định lí Ta-let đảo)

Do đó bài toán được chứng minh.

Bài 5.

a) Theo đề bài các đội đấu với nhau, tuy nhiên 1 không gặp 6 hay i nên 6 gặp i với mọi i ∈ {7; 8; 9; ...; 12}, vô lí vì đội 6 như thế đã đấu hơn 4 trận. Vậy có đpcm.

b) Kết luận không đúng. Chia 12 đội thành hai nhóm, mỗi nhóm 6 đội. Trong mỗi nhóm này, cho tất cả các đội đôi một đã thi đấu với nhau. Lúc này rõ ràng mỗi đội đã đấu 5 trận. Khi xét 3 đội bất kì, phải có 2 đội thuộc cùng một nhóm, do đó 2 đội này đã đấu với nhau. Ta có phản ví dụ.

Có thể giải quyết đơn giản hơn cho câu a) như sau :

Do mỗi đội đã đấu 4 trận nên tồn tại hai đội A, B chưa đấu với nhau. Trong các đội còn lại, vì A và B chỉ đấu 3 trận với họ nên tổng số trận của A, B với các đội này nhiều nhất là 6 và do đó, tồn tại đội C trong số các đội còn lại chưa đấu với cả A và B. Ta có A, B, C là đội đôi một chưa đấu với nhau.

ĐỀ THI TUYỂN SINH VÀO LỚP 10 CHUYÊN TỈNH GIA LAI

Câu 1. *(2,0 điểm)*

Cho biểu thức $Q=\left(\frac{\sqrt{x}+2}{x+2\sqrt{x}+1}-\frac{\sqrt{x}-2}{x-1}\right)(x+\sqrt{x})$, với $x>0$, $x\ne 1$.

a) Rút gọn biểu thức Q.

b) Tìm các giá trị nguyên của x để Q nhận giá trị nguyên.

Câu 2. *(1,5 điểm)*

Cho phương trình : $x^2-2(m+1)x+m-2=0$, với x là ẩn số, $m\in\mathbb{R}$

a) Giải phương trình đã cho khi $m=-2$.

b) Giả sử phương trình đã cho có hai nghiệm phân biệt x_1 và x_2. Tìm hệ thức liên hệ giữa x_1 và x_2 mà không phụ thuộc vào m.

Câu 3. *(2,0 điểm)*

Cho hệ phương trình $\begin{cases}(m+1)x-(m+1)y=4m\\ x+(m-2)y=2\end{cases}$, với $m\in\mathbb{R}$

a) Giải hệ đã cho khi $m=-3$.

b) Tìm điều kiện của m để phương trình có nghiệm duy nhất. Tìm nghiệm duy nhất đó.

Câu 4. *(2,0 điểm)*

Cho hàm số $y=-x^2$ có đồ thị (P). Gọi d là đường thẳng đi qua điểm M(0; 1) và có hệ số góc k.

a) Viết phương trình của đường thẳng d.

b) Tìm điều kiện của k để đường thẳng d cắt đồ thị (P) tại hai điểm phân biệt.

Câu 5. *(2,5 điểm)*

Cho tam giác nhọn ABC (AB < AC < BC) nội tiếp trong đường tròn (O). Gọi H là giao điểm của hai đường cao BD và CE của tam giác ABC (D ∈ AC, E ∈ AB)

a) Chứng minh tứ giác BCDE nội tiếp trong một đường tròn.

b) Gọi I là điểm đối xứng với A qua O và J là trung điểm của BC. Chứng minh rằng ba điểm H, J, I thẳng hàng.

c) Gọi K, M lần lượt là giao điểm của AI với ED và BD. Chứng minh rằng :

$$\frac{1}{DK^2}=\frac{1}{DA^2}+\frac{1}{DM^2}.$$

BÀI GIẢI

Câu 1.

a) $$Q=\left(\frac{\sqrt{x}+2}{x+2\sqrt{x}+1}-\frac{\sqrt{x}-2}{x-1}\right)(x+\sqrt{x})$$

$$=\left(\frac{\sqrt{x}+2}{(\sqrt{x}+1)^2}-\frac{\sqrt{x}-2}{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)}\right)\sqrt{x}(\sqrt{x}+1)=\left(\frac{\sqrt{x}+2}{\sqrt{x}+1}-\frac{\sqrt{x}-2}{\sqrt{x}-1}\right)\sqrt{x}$$

$$=\left(\frac{\sqrt{x}+1+1}{\sqrt{x}+1}-\frac{\sqrt{x}-1-1}{\sqrt{x}-1}\right)\sqrt{x}=\left(1+\frac{1}{\sqrt{x}+1}-1+\frac{1}{\sqrt{x}-1}\right)\sqrt{x}$$

$$=\left(\frac{1}{\sqrt{x}+1}+\frac{1}{\sqrt{x}-1}\right)\sqrt{x}=\frac{\sqrt{x}-1+\sqrt{x}+1}{x-1}.\sqrt{x}=\frac{2\sqrt{x}}{x-1}.\sqrt{x}=\frac{2x}{x-1}.$$

b) Q nhận giá trị nguyên

$$Q=\frac{2x}{x-1}=\frac{2x-2+2}{x-1}=2+\frac{2}{x-1}$$

Q ∈ ℕ khi $\dfrac{2}{x-1}$ ∈ ℕ khi 2 chia hết cho x − 1

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x-1=\pm1\\x-1=\pm2\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\x=2\\x=-1\\x=3\end{array}\right.\text{ đối chiếu điều kiện thì }\left[\begin{array}{l}x=2\\x=3\end{array}\right..$$

Câu 2.

a) Khi m = −2, ta có phương trình :

$$x^2+2x-4=0\Leftrightarrow x^2+2x+1=5\Leftrightarrow(x+1)^2=5=(\sqrt{5})^2$$

$$\Leftrightarrow|x+1|=\sqrt{5}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x+1=-\sqrt{5}\\x+1=\sqrt{5}\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=-1-\sqrt{5}\\x=-1+\sqrt{5}\end{array}\right.$$

Vậy phương trình có hai nghiệm $x=-1-\sqrt{5}$ và $x=-1+\sqrt{5}$.

b) Theo định lý Vi-ét, ta có $\begin{cases}x_1+x_2=2m+2 & (1)\\ x_1x_2=m-2 & (2)\end{cases}$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}x_1+x_2=2m+2\\ m=x_1x_2+2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x_1+x_2=2(x_1x_2+2)+2\\ m=x_1x_2+2\end{cases}$$

Suy ra : $x_1+x_2=2(x_1x_2+2)+2\Leftrightarrow x_1+x_2-2x_1x_2-6=0.$

Câu 3.

a) Khi m = −3, ta được hệ phương trình :

$$\begin{cases}-2x+2y=-12\\ x-5y=2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}-x+y=-6\\ x-5y=2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=7\\ y=1\end{cases}$$

Vậy hệ phương trình có nghiệm (x; y) với (7; 1).

b) Điều kiện có nghiệm của phương trình

$$\frac{m+1}{1}\neq\frac{-(m+1)}{m-2}\Leftrightarrow(m+1)(m-2)\neq-(m+1)$$

$$\Leftrightarrow(m+1)(m-2)+(m+1)\neq0\Leftrightarrow(m+1)(m-1)\neq0$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}m+1\neq0\\ m-1\neq0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}m\neq-1\\ m\neq1\end{cases}$$

Vậy phương trình có nghiệm khi m ≠ −1 và m ≠ 1.

Giải hệ phương trình $\begin{cases}(m+1)x-(m+1)y=4m\\ x+(m-2)y=2\end{cases}$ khi $\begin{cases}m\neq-1\\ m\neq1\end{cases}$

$$\begin{cases}(m+1)x-(m+1)y=4m\\ x+(m-2)y=2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x-y=\dfrac{4m}{m+1}\\ x+(m-2)y=2\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}x=y+\dfrac{4m}{m+1}\\ y=\dfrac{-2}{m+1}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=\dfrac{4m-2}{m+1}\\ y=\dfrac{-2}{m+1}\end{cases}.$$

Vậy hệ có nghiệm (x; y) với $\left(\dfrac{4m-2}{m+1};\dfrac{-2}{m+1}\right)$.

Câu 4.

a) Đường thẳng d với hệ số góc k có dạng y = kx + b

Đường thẳng d đi qua điểm M(0; 1) nên 1 = k.0 + b ⇔ b = 1

Vậy d : y = kx + 1.

b) Phương trình hoành độ giao điểm của (P) và d :

$$-x^2=kx+1\Leftrightarrow x^2+kx+1=0,\text{ có }\Delta=k^2-4$$

d cắt (P) tại hai điểm phân biệt khi Δ > 0

$$k^2-4>0\Leftrightarrow k^2>4\Leftrightarrow k^2>2^2\Leftrightarrow|k|>2\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}k<-2\\k>2\end{array}\right..$$

Câu 5.

a) Ta có $\widehat{BEC} = \widehat{BDC} = 90^o$

Suy ra BCDE nội tiếp trong đường tròn đường kính BC.

b) Ta có IB ⊥ AB; CE ⊥ AB (CH ⊥ AB)

Suy ra IB // CH.

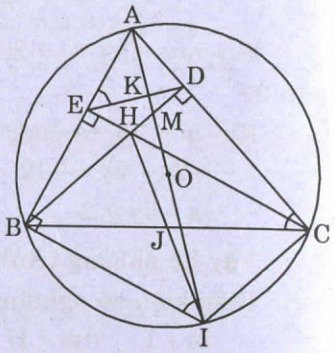
Ta có IC ⊥ AC; BD ⊥ AC (BH ⊥ AC)

Suy ra BH // IC.

Như vậy tứ giác BHCI là hình bình hành.

J trung điểm BC ⇒ J trung điểm IH

Vậy H, J, I thẳng hàng.



c) $\widehat{ACB} = \widehat{AIB} = \frac{1}{2}\overset{\frown}{AB}$

$\widehat{ACB} = \widehat{DEA}$ cùng bù với $\widehat{DEB}$ của tứ giác nội tiếp BCDE

$\widehat{BAI} + \widehat{AIB} = 90^o$ vì ΔABI vuông tại B

Suy ra $\widehat{BAI} + \widehat{AED} = 90^o$, hay $\widehat{EAK} + \widehat{AEK} = 90^o$

Suy ra ΔAEK vuông tại K

Xét ΔADM vuông tại M (suy từ giả thiết)

DK ⊥ AM (suy từ chứng minh trên)

Như vậy $\dfrac{1}{DK^2} = \dfrac{1}{DA^2} + \dfrac{1}{DM^2}$.

MỤC LỤC

Lời nói đầu 3

Đề 1. Thi vào lớp 10 chuyên tại TPHCM 2006 – 2007 5

Đề 2. Thi vào lớp 10 PTTH tại TPHCM 2006 – 2007 8

Đề 3. Chuyên Toán, Lê Hồng Phong, TPHCM 2005 – 2006 12

Đề 4. Chuyên Ban A, B, Lê Hồng Phong, TPHCM 2005 – 2006 15

Đề 5. Chuyên Toán, Lê Hồng Phong, TPHCM 2004 – 2005 18

Đề 6. Chuyên Ban A, B, Lê Hồng Phong, TPHCM 2003 – 2004 21

Đề 7. Chuyên Toán, Lê Hồng Phong, TPHCM 2003 – 2004 24

Đề 8. Chuyên Toán, Lê Hồng Phong, TPHCM 2002 – 2003 30

Đề 9. Chuyên Ban A, B, Lê Hồng Phong, TPHCM 2001 – 2002 35

Đề 10. Chuyên Toán, Lê Hồng Phong, TPHCM 2001 – 2002 40

Đề 11. Chuyên Ban A, B, Lê Hồng Phong, TPHCM 2000 – 2001 44

Đề 12. Chuyên Toán, Lê Hồng Phong, TPHCM 2000 – 2001 47

Đề 13. Chuyên Toán – Tin, Chu Văn An – Amsterdam 2005 – 2006 50

Đề 14. Chuyên Khoa học tự nhiên, Chu Văn An – Amsterdam 2005 – 2006 53

Đề 15. Chuyên Toán – Tin, Chu Văn An – Amsterdam 2004 – 2005 56

Đề 16. Chuyên Khoa học Tự nhiên, Chu Văn An – Amsterdam 2004 – 2005 58

Đề 17. Chuyên Khoa học Tự nhiên, Chu Văn An – Amsterdam 2003 – 2004 61

Đề 18. Chuyên Toán - Tin, Chu Văn An – Amsterdam 2003 – 2004 63

Đề 19. Chuyên Toán - Tin, Trường PTNK, ĐHQG Hà Nội 2005 – 2006 66

Đề 20. Chuyên Khoa học Tự nhiên, Trường PTNK, ĐHQG Hà Nội 2005 – 2006 70

Đề 21. Chuyên Toán - Tin, Trường PTNK, ĐHQG Hà Nội 2004 – 2005 73

Đề 22. Chuyên Khoa học Tự nhiên, Trường PTNK, ĐHQG Hà Nội 2004 – 2005 75

Đề 23. Chuyên Khoa học Tự nhiên, Trường PTNK, ĐHQG Hà Nội 2003 – 2004 77

Đề 24. Chuyên Toán - Tin, Trường PTNK, ĐHQG Hà Nội 2003 – 2004 80

Đề 25. Chuyên Toán - Tin, Trường PTNK, ĐHQG Hà Nội 2002 – 2003 82

Đề 26. Chuyên Khoa học Tự nhiên, Trường PTNK, ĐHQG Hà Nội 2002 – 2003 85

Đề 27. Chuyên Ban C, D, Trường PTNK, ĐHQG TPHCM 2004 – 2005 87

Đề 28. Chuyên Ban A, B, Trường PTNK, ĐHQG TPHCM 2004 – 2005 91

Đề 29. Chuyên Toán – Tin, Trường PTNK, ĐHQG TPHCM 2004 – 2005 94

Đề 30. Chuyên Ban A, B, Trường PTNK, ĐHQG TPHCM 2003 – 2004 99
Đề 31. Chuyên Toán – Tin, Trường PTNK, ĐHQG TPHCM 2002 – 2003 103
Đề 32. Chuyên Ban A, B, Trường PTNK, ĐHQG TPHCM 2002 – 2003 107
Đề 33. Chuyên Toán – Tin, Trường PTNK, ĐHQG TPHCM 2001 – 2002 110
Đề 34. Chuyên Ban A, B, Trường PTNK, ĐHQG TPHCM 2001 – 2002 116
Đề 35. Chuyên Toán – Tin, Trường PTNK, ĐHQG TPHCM 2000 – 2001 120
Đề 36. Chuyên Toán, Trần Đại Nghĩa, TPHCM 2004 – 2005 126
Đề 37. Chuyên Ban A, B, Trần Đại Nghĩa, TPHCM 2004 – 2005 128
Đề 38. Chuyên Ban A, B, Trần Đại Nghĩa, TPHCM 2003 – 2004 131
Đề 39. Chuyên Toán, Trần Đại Nghĩa, TPHCM 2003 – 2004 134
Đề 40. Chuyên Ban A, B, Trường PTNK, ĐHQG, TPHCM 2000 – 2001 138
Đề 41. Chuyên Ban A, B, Trần Đại Nghĩa, TPHCM 2000 – 2001 142
Đề 42. Chuyên Ban A, B, Trần Đại Nghĩa, TPHCM 2001 – 2002 145
Đề 43. Thi vào lớp 10 PTTH, ĐHSP Hà Nội 2004 – 2005 149
Đề 44. Thi vào lớp 10 PTTH, ĐH Ngoại ngữ Hà Nội 2004 – 2005 151
Đề 45. Chuyên Toán – Tin, ĐHSP Vinh 2005 – 2006 154
Đề 46. Chuyên Khoa học Tự nhiên, ĐHSP Vinh 2005 – 2006 156
Đề 47. Chuyên Toán – Tin, ĐHSP Vinh 2004 – 2005 159
Đề 48. Chuyên Toán – Tin, ĐHSP Vinh 2002 – 2003 163
Đề 49. Chuyên Toán, Trường PTNK Trần Phú, Hải Phòng 2005 – 2006 165
Đề 50. Thi vào lớp 10, Trường PTNK Trần Phú, Hải Phòng 2002 – 2003 168
Đề 51. Thi vào lớp 10, Quốc học Huế 2004 – 2005 171
Đề 52. Thi vào lớp 10, Quốc học Huế 2002 – 2003 173
Đề 53. Thi vào lớp 10, chuyên Lê Khiết Quảng Ngãi 2005 – 2006 176
Đề 54. Chuyên Ban A, B, Lê Hồng Phong, Nam Định 2004 – 2005 179
Đề 55. Thi vào lớp 10, tỉnh Thái Bình 2005 – 2006 181
Đề 56. Thi vào lớp 10, chuyên Nguyễn Bỉnh Khiêm, Vĩnh Long 2005 – 2006 185
Đề 57. Thi vào lớp 10, chuyên Lê Quý Đôn, Đà Nẵng 2004 – 2005 187
Đề 58. Thi vào lớp 10, chuyên Lê Quý Đôn, Đà Nẵng 2003 – 2004 190
Đề 59. Thi vào lớp 10, chuyên Lê Quý Đôn, Quy Nhơn 2005 – 2006 193
Đề 60. Thi vào lớp 10, chuyên Lê Quý Đôn, Quy Nhơn 2004 – 2005 195
Đề 61. Thi vào lớp 10 THPT TPHCM 2009 – 2010 198
Đề 62. Thi vào lớp 10 THPT Hà Nội 2009 – 2010 201
Đề 63. Thi vào lớp 10 THPT chuyên TPHCM 2009 – 2010 204
Đề 64. Thi vào lớp 10 THPT chuyên Hà Nội (Chuyên Toán – Tin) 2009 – 2010 208
Đề 65. Thi vào lớp 10 THPT chuyên Quốc học Huế 2009 – 2010 211
Đề 66. Thi vào lớp 10 THPT chuyên Lê Quý Đôn, Nha Trang 2009 – 2010 215
Đề 67. Thi vào lớp 10 PTNK ĐHQG TPHCM 2009 – 2010 219
Đề 68. Thi vào lớp 10 THPT chuyên Phan Bội Châu, Nghệ An 2009 – 2010 223
Đề 69. Thi vào lớp 10 THPT TPHCM 2008 – 2009 226
Đề 70. Thi vào lớp 10 THPT Hà Nội 2008 – 2009 229
Đề 71. Thi vào lớp 10 PTNK ĐHQG TPHCM (Toán AB) 2008 – 2009 231
Đề 72. Thi vào lớp 10 PTNK ĐHQG TPHCM (Toán CD) 2008 – 2009 233
Đề 73. Thi vào lớp 10 THPT chuyên TPHCM 2008 – 2009 235
Đề 74. Thi vào lớp 10 THPT Chu Văn An và THPT Hà Nội – Amsterdam (Chuyên Khoa học Tự nhiên) 2008 – 2009 239
Đề 75. Thi vào lớp 10 THPT chuyên Lê Quý Đôn, Đà Nẵng 2008 – 2009 242
Đề 76. Thi vào lớp 10 PTNK ĐHQG TPHCM (Toán AB) 2007 – 2008 245
Đề 77. Thi vào lớp 10 THPT Chu Văn An và THPT Hà Nội – Amsterdam (Chuyên Khoa học Tự nhiên) 2007 – 2008 248
Đề 78. Thi vào lớp 10 THPT chuyên TPHCM 2007 – 2008 251
Đề 79. Thi vào lớp 10 chuyên ĐH KHTN Hà Nội 2007 – 2008 255
Đề 80. Thi vào lớp 10 ĐH KHTN Hà Nội (Chuyên Toán – Tin) 2007 – 2008 257
CÁC ĐỀ THI TUYỂN SINH VÀO LỚP 10 THPT NĂM HỌC 2011 – 2012 261
CÁC ĐỀ THI TUYỂN SINH VÀO LỚP 10 THPT NĂM HỌC 2012 – 2013 280